

Kiertomatriisi
Erikoistyö

2002

Petri Rönholm

Sisällys

1	JOHDANTO	1
2	KIERTOSUUNNAT	1
3	OMEGA-, PHI- JA KAPPA-KIERROT	3
4	ALPHA-, NYI- JA KAPPA-KIERTO	5
5	KOLMIULOTTEISEN KIERTOMATRIISIN OMINAISUUKSIA	7
6	KIERTOMATRIISIN KORVAAMINEN MILLÄ TAHANSA ORTOGONAALISELLA MATRIISILLA	9
7	KIERTOMATRIISIN LASKEMINEN 3 PISTEEN JA KAMERAN PROJEKTIOPISTEEN AVULLA	10
8	KIERTOMATRIISI OSANA MUUNNOKSIA	12
8.1	Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos	12
8.2	Kollineaarisuusyhtälöt	12
8.3	Katselupiste, -suunta ja suhteellinen liikkuminen T-matriisin avulla	13
	LÄHTEET	14

Liitteet:

Liite 1: Kaksiulotteisen kiertomatriisin johtaminen suuntakosinien avulla

Liite 2: Kaksiulotteisen kiertomatriisin johtaminen geometrisesti

Liite 3: 3D kiertomatriisin laskeminen 2D osamatriiseista

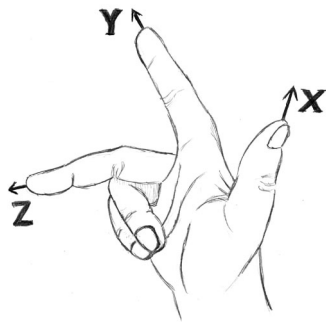
Liite 4. Rodrigues-matriisin muodostaminen

1 Johdanto

Kiertomatriisi on perustyökalu kaikenlaisiin koordinaatistojen, pisteiden ja kappaleiden kiertoihin. Käytännön toteutuksissa valmiin kiertomatriisin käyttäminen on tehokasta ja yksinkertaista. Kiertomatriisi sisältää kuitenkin paljon enemmän kuin ensinäkemältä voisi kuvitella. Toisaalta se on tehokas työkalu, mutta toisaalta ilman hieman syvempää tunte- mista sen kanssa voi tulla yllättäviä ongelmia. Tämän työn on tarkoitus koota kierto- matriisin ominaisuuksia, tulkintoja ja muodostamistapoja yksiin kansiin.

2 Kiertosuunnat

Kiertojen ymmärtämiseksi on ensin ymmärrettävä kolmiulotteisen koordinaatiston sopi- muksia. Yleensä käytetään oikeakätistä koordinaatistoa, jolloin koordinaattiakseleita voi- daan kuvata oikean käden sormilla (kuva 1).



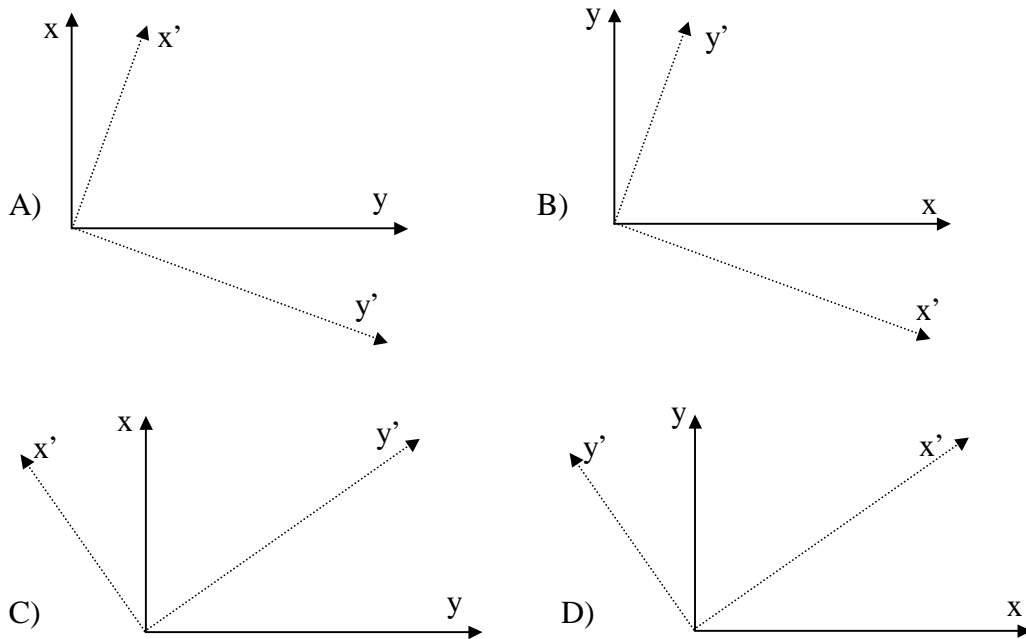
Kuva 1. Oikeakätisen koordinaatiston akselien suunnat voidaan tarkistaa asettamalla oikean käden peukalo, etusormi ja etusormi kuvan esittämällä tavalla. Vasenkätiseen koordinaatistoon voidaan käyttää vastaavasti vasenta kättä.

On sovittu, että kierron suunta jonkin akselin ympäri katsotaan origosta kohti akselin kas- vusuuntaa. Kierto myötäpäivään voidaan tarkistaa toisen sormisäännön avulla (kuva 2), jossa peukalo laitetaan akselin kasvusuuntaan ja muut sormet taipuvat luonnollisesti myö- täpäivään akselin ympärille.



Kuva 2. Kun peukalo asetetaan akselin kasvusuuntaan, muut sormet osoittavat kierron myötäpäivään.

Etenkin, kun mietitään kiertosuuntia kaksiulotteisessa tapauksessa, kannattaa olla erityisen huolellinen ja käyttää edellä mainittuja muistisääntöjä. Kuvassa 3 on esitetty, miten kaksiulotteisessa kierrossa ensisilmäys voi hämätä. Kierron suuntaa ei voi päätellä miettimättä mihin suuntaan z-akseli osoittaa.



Kuva 3. Kaikissa kuvissa alkuperäinen koordinaatisto (xy) on esitetty yhtenäisellä viivalla ja kierretty koordinaatisto katkoviivalla. Kierrot ovat z -akselin ympäri joko myötä- tai vastapäivään. A) z -akseli uppoaa paperin sisään, joten kierto on myötäpäivään. B) z -akseli nousee paperista ylöspäin, joten kierto on vastapäivään. C) Kierto on vastapäivään. D) Kierto on myötäpäivään.

Seuraavassa esitetään kierrot myötäpäivään kunkin koordinaattiakselin ympäri. Kaksiulotteisten kiertomatriisien johtaminen on esitetty liitteissä 1 ja 2.

Omega-kierto (ϖ) x -akselin ympäri myötäpäivään:

$$R_{\varpi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varpi & \sin \varpi \\ 0 & -\sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix} \quad (1)$$

Phi-kierto (φ) y -akselin ympäri myötäpäivään:

$$R_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Kappa-kierto z-akselin ympäri myötäpäivään:

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Seuraavassa esitetään kierrot vastapäivään kunkin koordinaattiakselin ympäri.

Omega-kierto (ϖ) x-akselin ympäri vastapäivään:

$$R_{\varpi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varpi & -\sin \varpi \\ 0 & \sin \varpi & \cos \varpi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Phi-kierto (φ) y-akselin ympäri vastapäivään:

$$R_{\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kappa-kierto z-akselin ympäri vastapäivään:

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Kolmiulotteinen kiertomatriisi saadaan laskettua kertomalla matriisit käänteisesti halutussa kiertojärjestyksessä. Esimerkiksi, jos halutaan kiertojärjestykseksi omega, phi ja kappa, kolmiulotteinen kiertomatriisi saataisiin yhtälöstä:

$$R_{\varpi\varphi\kappa} = R_{\kappa} R_{\varphi} R_{\varpi}. \quad (7)$$

Liitteessä 3 on esitetty, miksi osamatriisien kertominen tehdään käänteisessä järjestyksessä kiertojärjestykseen nähden.

3 Omega-, phi- ja kappa-kierrot

Yleisesti käytetty tapa on ajatella kierrot koordinaattiakselien ympäri siten, että ω on kierto x-akselin ympäri, φ on kierto y-akselin ympäri ja κ on kierto z-akselin ympäri. Seuraavassa on esitetty kiertomatriisi, jossa kiertojärjestys on $\omega\varphi\kappa$ ja kaikki kierrot ovat positiivisia myötäpäivään akseliinsa nähden (kuva 4)

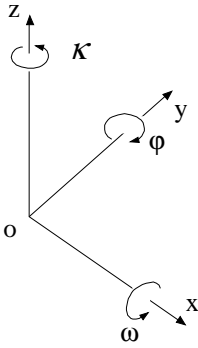
$$R_{\omega\varphi\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\kappa & (\cos\omega \sin\kappa + \sin\omega \sin\varphi \cos\kappa) & (\sin\omega \sin\kappa - \cos\omega \sin\varphi \cos\kappa) \\ -\cos\varphi \sin\kappa & (\cos\omega \cos\kappa - \sin\omega \sin\varphi \sin\kappa) & (\cos\omega \sin\kappa + \cos\omega \sin\varphi \sin\kappa) \\ \sin\varphi & -\sin\omega \cos\varphi & \cos\omega \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Homogeenisessa koordinaatostossa matriisi voidaan kirjoittaa:

$$R_{\omega\varphi\kappa} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Kiertomatriisin elementtien $r_{11} \dots r_{nn}$ indeksöinti on valittu niin, että se vastaa fotogrammetristen kollineaarisuusyhtälöiden yleisestä käytäntöä. Matriisi $R_{\omega\varphi\kappa}$ tekee muunnoksen alkuperäisestä koordinaatistosta kiertyneeseen koordinaatistoon. Fotogrammetrisissa tehtävissä yleensä ajatellaan, että kohdekoordinaatisto on alkuperäinen ja kameran koordinaatisto on kiertynyt. Matriisia $R_{\omega\varphi\kappa}$ siis käytetään muunnokseen kohdekoordinaatistosta kamerakoordinaatistoon. Kun halutaan tehdä muunnos kamerakoordinaatistosta kohdekoordinaatistoon, käytetään kiertomatriisin transpoosia $R_{\omega\varphi\kappa}^T$. Kappaleessa X kerrotaan tarkemmin, miksi näin voi tehdä.



Kuva 4. Kierrot x-, y- ja z-akselien ympäri ovat positiivisia myötäpäivään.

Kiertomatriisin elementtien laskentakaavat muuttuvat, jos kiertojärjestystä tai kiertojen positiivisia suuntia muutetaan. Matriisin elementeistä tulee kuitenkin numeerisesti samat huolimatta valitusta järjestelmästä. Jos on olemassa tunnettu kiertomatriisi, voidaan siitä laskea käänteisesti kierrot esimerkiksi kaavoilla:

$$\tan\omega = -\frac{r_{23}}{r_{33}}, \quad \sin\varphi = r_{13}, \quad \tan\kappa = -\frac{r_{12}}{r_{11}}. \quad (10)$$

Kiertomatriisi ei ole yksiselitteinen. Sama kiertomatriisi voidaan muodostaa kahdella erilaisella $\omega\phi\kappa$ -yhdistelmällä. Tämän johdosta tulee erikseen tarkistaa, että saadut kulmat ovat halutussa neljänneksessä. [7], [3]

4 Alpha-, nyy- ja kappa-kierto

Kiertomatriisi voidaan muodostaa myös kuvaussuunnan atsimuutin (α), kuvakallistuksen (ν) ja kuvakierron (κ) avulla (kuva 5). Erityisesti viistokuvauksissa tämä kiertojärjestelmä on helpompi mieltää kuin $\omega\phi\kappa$ -kierrot. Kiertomatriisi kiertojärjestyksessä $\alpha\nu\kappa$, jossa kaikki kierrot ovat positiivisia myötäpäivään on muotoa [4]

$$R_{\alpha\nu\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\kappa - \sin\alpha \cos\nu \sin\kappa & \sin\alpha \cos\kappa + \cos\alpha \cos\nu \sin\kappa & \sin\nu \sin\kappa \\ -\cos\alpha \sin\kappa - \sin\alpha \cos\nu \cos\kappa & -\sin\alpha \sin\kappa + \cos\alpha \cos\nu \cos\kappa & \sin\nu \cos\kappa \\ \sin\alpha \sin\nu & -\cos\alpha \sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Kiertomatriisin elementtien $r_{11} \dots r_{33}$ indeksöinti on valittu niin, että se vastaa fotogrammetristen kollineaarisuusyhtälöiden yleisestä käytäntöä. Matriisi $R_{\alpha\nu\kappa}$ tekee muunnoksen alkuperäisestä koordinaatistosta kiertyneeseen koordinaatistoon. Fotogrammetrisissa tehtävissä yleensä ajatellaan, että kohdekoordinaatisto on alkuperäinen ja kameras koordinaatisto on kiertynyt. Matriisia $R_{\alpha\nu\kappa}$ siis käytetään muunnokseen kohdekoordinaatistosta kamerakoordinaatistoon. Kun halutaan tehdä muunnos kamerakoordinaatistosta kohdekoordinaatistoon, käytetään kiertomatriisin transpoosia $R_{\alpha\nu\kappa}^T$. Kappalessa X kerrotaan tarkemmin, miksi näin voi tehdä.

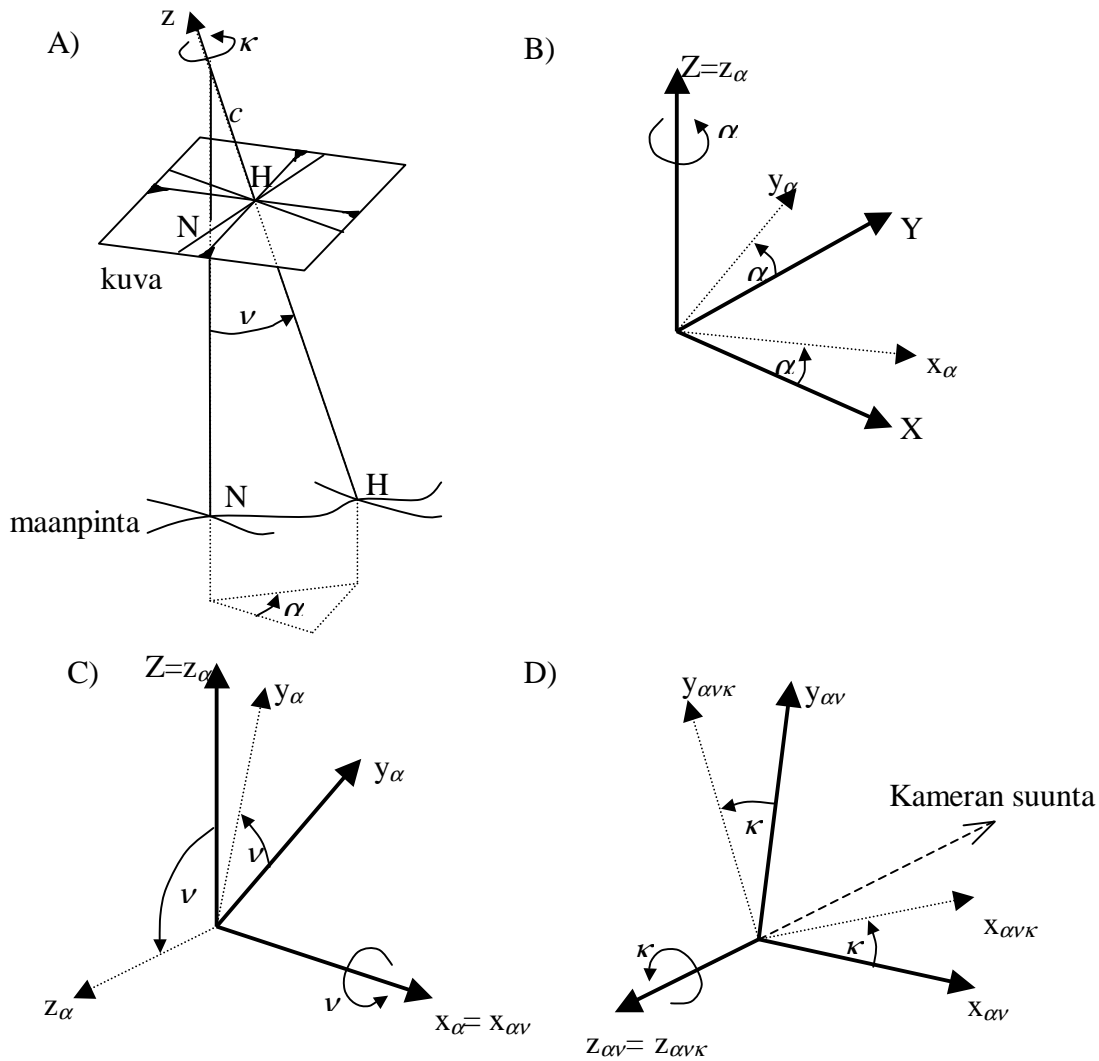
Kolmiulotteinen kiertomatriisi muodostuu kuvan 5 B), C) ja D) mukaisista kaksiulotteisista kiertomatriiseista (kierretty myötäpäivään):

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$R_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu & \sin\nu \\ 0 & -\sin\nu & \cos\nu \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$R_{\alpha\nu\kappa} = R_{\kappa} R_{\nu} R_{\alpha} \quad (15)$$



Kuva 5. A) Yleiskuva $\alpha v \kappa$ -kierroista [7]. B) Kierro atsimuutin ympäri, C) kuvakallistus ja D) kuvakierto [4]

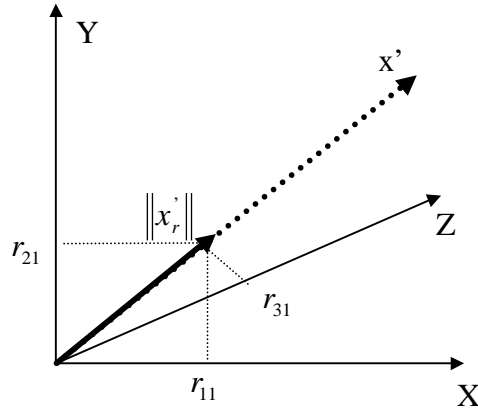
Käytännön sovelluksia varten on huomattava, että edellä annetussa kiertomatriisissa kuvaussuunnan atsimuutin kasvusuunta on vastakkainen esimerkiksi kompassisuunnan kanssa (kuva 5 A). Jos halutaan suoraan käyttää kompassisuuntia, alpha-kierro pitää tehdä vastapäivään. Kuten $\omega \varphi \kappa$ -kiertojenkin tapauksessa myös $\alpha v \kappa$ -kierrot on laskettavissa tunnetusta kiertomatriisista:

$$\tan \alpha = -\frac{r_{13}}{r_{23}}, \quad \cos v = r_{33}, \quad \tan \kappa = \frac{r_{31}}{r_{32}}. \quad (16)$$

Myös $\alpha v \kappa$ -kiertojen oikeat neljännekset on tarkastettava erikseen, koska kiertomatriisi ei ole yksiselitteinen. Huomattavaa on myös, jos kuvan 5 C) v -kierro on nolla (nadiiri-kuvaus), α - ja κ -kierrot tapahtuvat saman koordinaattiakselin ympäri. Sellaisessa tapauksessa näiden kiertojen erottelu toisistaan on siis mahdotonta. Yleensä alpha-nyy-kappa -kiertoja käytetäänkin vain muihin kuin pystykuvauksiin. Maakuvauksissa alpha-nyy-kappa -kierrot ovat helpommin mielletävissä kuin omega-phi-kappa -kierrot.

5 Kolmiulotteisen kiertomatriisin ominaisuuksia

Kolmiulotteinen kiertomatriisi on ortogonaalinen. Ortogonaalinen koordinaatisto on suorakulmainen, joten eteneminen yhden akselin suuntaan on riippumaton sijainnista toisten akselien suhteen. Kierrettävän kohteen muoto ei muunnoksessa muutu.



Kuva 6. Tarkastellaan kolmiulotteisen kiertomatriisin ensimmäistä riviä. Rivin kolme elementtiä (r_{11}, r_{21}, r_{31}) ovat kiertyneen x' -akselin yksikkövektorin projektiot X-, Y- ja Z-akseleille [2].

Kiertomatriisin vaakarivit ovat kiertyneen koordinaatiston akselien yksikkövektoreiden projektiot alkuperäisen koordinaatiston akselille. Kuvassa 6 on tätä havainnollistettu yhdellä kiertyneellä akselilla. Vastaava tarkastelu voidaan tehdä kaikille kolmelle akselille. Yksikkövektorin pituus on tietysti yksi, joten

$$\|x'_r\| = \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2} = 1. \quad (17)$$

Koska tiedämme etukäteen tuloksen olevan yksi, voidaan laskuista jättää neliöjuuri pois. Sama ehto toimii myös pystysarakkeisiin. Silloin kyseessä on alkuperäisten koordinaatti-akselien yksikkövektoreiden projektiot kiertyneen koordinaatiston koordinaattiakseleille. Rivejä ja sarakkeita kutsutaan ortonormaaleiksi.

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 &= 1 \\ r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 &= 1 \\ r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \\ r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (18 \text{ a})$$

Ortonormaalin systeemin määritelmään kuuluvat lisäksi, että kunkin rivin tai sarakkeen välinen sisätulo on nolla:

$$\begin{aligned}
r_{11}r_{21} + r_{12}r_{22} + r_{13}r_{23} &= 0 \\
r_{11}r_{31} + r_{12}r_{32} + r_{13}r_{33} &= 0 \\
r_{21}r_{31} + r_{22}r_{32} + r_{23}r_{33} &= 0 \\
r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \\
r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 \\
r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0
\end{aligned} \tag{18 b}$$

Edellä esitetyt ortogonaaliehtod voidaan kirjoittaa yleisessä tapauksessa, jos pysty- ja vaakasarakkeita merkitään $a_1 \dots a_n$ (alaindeksi j viittaa riveihin ja k sarakkeisiin) [5]:

$$a_j \bullet a_k = a_j^T a_k = \begin{cases} 0, & \text{jos } j \neq k \\ 1, & \text{jos } j = k \end{cases} \tag{18 c}$$

Nyt voidaan todistaa ortogonaalisen matriisin käytännön kannalta ehkä tärkein ominaisuus [5]:

$$A^{-1}A = A^T A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \dots & a_1^T a_n \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & \dots & a_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^T a_1 & a_n^T a_2 & \dots & a_n^T a_n \end{bmatrix} = I \tag{19}$$

Ortogonaalisen matriisin käänteismatriisi on siis sama kuin sen transpoosi:

$$A^{-1} = A^T \tag{20}$$

Ortogonaalisen matriisin determinantti on 1 tai -1 [5]:

$$1 = \det I = \det (AA^{-1}) = \det (AA^T) = \det A \det A^T = (\det A)^2 \tag{21}$$

Lisäksi jokainen matriisin elementti on yhtä suuri kuin alideterminanttinsa [7]. Kolmiulotteiselle kiertomatriisille siis pätee:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32} \\
r_{12} &= r_{23}r_{31} - r_{21}r_{33} \\
r_{13} &= r_{21}r_{32} - r_{22}r_{31} \\
r_{21} &= r_{32}r_{13} - r_{12}r_{33} \\
r_{22} &= r_{11}r_{33} - r_{13}r_{31} \\
r_{23} &= r_{31}r_{12} - r_{11}r_{32} \\
r_{31} &= r_{12}r_{23} - r_{13}r_{22} \\
r_{32} &= r_{21}r_{13} - r_{11}r_{23} \\
r_{33} &= r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}
\end{aligned} \tag{22}$$

Jos kerrotaan kaksi samankokoista ortogonaalista matriisiä keskenään, tuloksena saadaan myös ortogonaalinen matriisi [8]:

$$\begin{aligned}(AB)^T(AB) &= B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I \\ (BA)^T(BA) &= A^T B^T BA = A^T IA = A^T A = I\end{aligned}\tag{23}$$

Ortogonaalisia kiertomatriiseja voidaan siis yhdistellä kertomalla kadottamatta ortogonaalisuutta.

6 Kiertomatriisin korvaaminen millä tahansa ortogonaalisella matriisilla

Kiertomatriisi voidaan korvata millä tahansa matriisilla, mikä toteuttaa ortogonaalisuusehdot [7]. Itse kolmiulotteinen kiertomatriisi pysyy samana, mutta sen muodostaminen ja tulkinta muuttuu. Yksi vaihtoehto on Rodrigues-matriisi (muodostaminen esitetty liitteessä 4), joka on rakennettu kolmesta riippumattomasta parametrilla a, b ja c:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{bmatrix}\tag{24}$$

Pienillä kierroilla parametrit a, b ja c vastaavat $\omega\phi\kappa$ -kiertoja.

Tässä yhteydessä esitetään vielä toinen ortogonaalinen matriisi, joka on rakennettu normaalista kiertomatriisista valitsemalla kolme toisistaan riippumatonta elementtiä. Kaikki loput matriisin elementit on lausuttu näiden kolmen funktiona:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - r_{21}^2 - a_{31}^2} & r_{21} & r_{31} \\ \frac{-r_{21}r_{33} - r_{31}r_{32}r_{11}}{1 - a_{31}^2} & \frac{r_{11}r_{33} - r_{21}r_{31}r_{32}}{1 - a_{31}^2} & r_{32} \\ \frac{r_{21}r_{32} - r_{31}r_{11}r_{33}}{1 - a_{31}^2} & \frac{-r_{32}r_{11} - r_{21}r_{31}r_{33}}{1 - a_{31}^2} & \sqrt{1 - r_{31}^2 - a_{32}^2} \end{bmatrix}.\tag{25}$$

Matriisin muodostaminen perustuu ortogonaalisuusehtoihin: vaaka- tai pystyrivien sisätulo on 1, joten

$$\begin{aligned}r_{11} &= \sqrt{1 - r_{21}^2 - a_{31}^2} \\ r_{22} &= \sqrt{1 - r_{12}^2 - a_{32}^2} \\ r_{33} &= \sqrt{1 - r_{31}^2 - a_{32}^2}\end{aligned}$$

sekä jokainen elementti on yhtä suuri kuin alideterminanttinsa (kappale 5).

$$r_{12} = -\frac{\begin{vmatrix} r_{21} & r_{31} \\ r_{23} & r_{33} \end{vmatrix}}{r_{31}r_{23} - r_{21}r_{33}} = \frac{-r_{21}r_{33} - r_{31}r_{32}r_{11}}{1 - a_{31}^2}$$

$$r_{13} = \frac{r_{21}r_{32} - r_{31}r_{11}r_{33}}{1 - a_{31}^2}$$

$$r_{23} = \frac{-r_{32}r_{11} - r_{21}r_{31}r_{33}}{1 - a_{31}^2}$$

Sijoitetaan vielä r_{12} r_{22} :een:

$$r_{22} = \sqrt{1 - r_{12}^2 - a_{32}^2} = \frac{r_{11}r_{33} - r_{21}r_{31}r_{32}}{1 - a_{31}^2}$$

7 Kiertomatriisin laskeminen 3 pisteen ja kameran projektiopisteen avulla

Kiertomatriisi voidaan laskea, jos tunnetaan 3 pistettä maastosta. Kuvan projektiokeskus täytyy ensin olla tunnettu. Se voidaan laskea pisteistä esimerkiksi Müller/Killian – menetelmällä, joka on esitetty Kraussin kirjassa kappaleessa 4.1.2.1 [4, s. 48-].

Kuvassa 8 on esitetty, kuinka vektorit i , j ja k ovat sellaisen koordinaatiston akselien suuntaisia, jossa x' -akseli kulkee pisteiden P_1' ja P_2' kautta. xy' -koordinaatisto voi olla siis kiertynyt suhteessa kuvakoordinaatistoon xy . Lisäksi molemmat edelliset koordinaatistot voivat olla kiertyneinä suhteessa maastokoordinaatistoon XYZ .

Tehdään ensin muunnos xy' -koordinaatistosta maastokoordinaatistoon. Maastopisteen koordinaatteja merkitään X :llä ja kuvapistettä xy' -koordinaatistossa x' :llä:

$$X = \hat{R}x' \tag{26}$$

Muunnoksessa kuvalta maahan pisteestä P_1' lähteviä yksikkövektoreita merkitään symboleilla \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} . Yksikkövektori \bar{i} valittiin x' -akselin suuntaiseksi, joten pätee

$$\bar{i} = \frac{\overline{P_1'P_2'}}{\|P_1'P_2'\|}. \tag{27}$$

Yksikkövektori \bar{k} on kohtisuorassa vektorien $\overline{P_1'P_2'}$ ja $\overline{P_1'P_3'}$ virittämään tasoon nähden:

$$\bar{k} = \frac{\overline{P_1'P_2'} \times \overline{P_1'P_3'}}{\|\overline{P_1'P_2'} \times \overline{P_1'P_3'}\|}. \tag{28}$$

Yksikkövektori \bar{j} on taas kohtisuorassa kahteen edellä johdettuun vektoriin nähden:

$$\bar{j} = \bar{k} \times \bar{i}. \quad (29)$$

Yksikkövektorit \bar{i} , \bar{j} ja \bar{k} ovat kiertomatriisin \bar{R} vaakarivit tässä järjestyksessä.

Täysin vastaava menettely tehdään muunnoksessa xy' -koordinaatistosta xy -koordinaatistoon. Nyt samoja yksikkövektoreita merkitään selvyuden vuoksi eri symboleilla \hat{i} , \hat{j} ja \hat{k} . Jos kuvapistettä xy' -koordinaatistossa merkitään taas x' :llä ja vastaavaa kuvapistettä xy -kuvakoordinaatistossa x :llä, saadaan muunnos

$$x = \hat{R}x' \quad (30)$$

Yksikkövektorit \hat{i} , \hat{j} ja \hat{k} ovat kiertomatriisin \hat{R} vaakarivit tässä järjestyksessä.

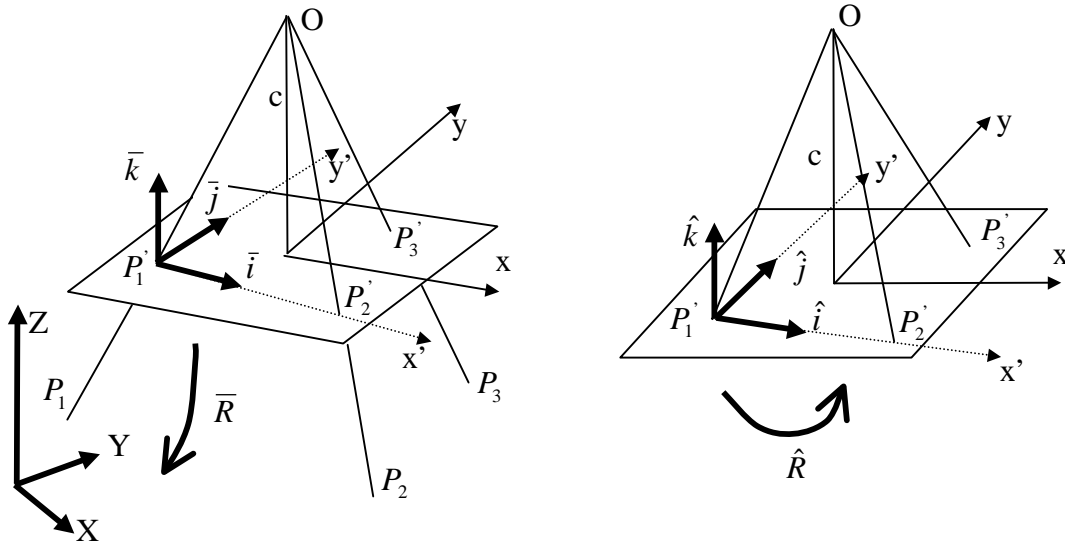
Nyt voidaan yhdistää matriisit, jotta saataisiin suora muunnos xy -kuvakoordinaatistosta XYZ-maastokoordinaatistoon:

$$X = \bar{R}\hat{R}^T x = R x. \quad (31)$$

Laskuissa tarvittavat vektorien $\overline{OP'_i}$ pituudet saadaan kuvakoordinaattien avulla (kuva 8):

$$\overline{OP'_i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + c^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

[4]



Kuva 7. xy' -koorinaatistossa olevien yksikkövektorien muunnos XYZ-maastokoordinaatistoon sekä xy -kuvakoordinaatistoon. [4]

8 Kiertomatriisi osana muunnoksia

Tässä kappaleessa esitellään kolme tärkeää muunnosta, joissa kolmiulotteista kiertomatriisia käytetään tehokkaasti hyväksi. Erilaisia käyttökohteita kiertomatriisille on olemassa huomattavasti enemmän kuin tässä yhteydessä esitetään.

8.1 Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos

Kolmiulotteisella yhdenmuotoisuusmuunnoksella voidaan 3D-pisteelle laskea uudet 3D-koordinaatit kiertyneessä, siirtyneessä ja mittakaavaltaan muuttuneessa koordinaatistossa. Muunnosta kutsutaan myös yleisesti seitsemänparametriseksi muunnokseksi [6].

Jos merkitään pistettä P alkuperäisessä koordinaatistossa $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ja kierretyssä koordinaatistossa $p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, voidaan kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos kirjoittaa:

$$p' = \lambda R p + t, \quad (33)$$

missä λ on mittakaavakerroin, R on kolmiulotteinen kiertomatriisi ja t on koordinaatiston siirto.

8.2 Kollineaarisuusyhtälöt

Kollineaarisuusyhtälöiden avulla voidaan tehdä muunnos maastosta kuvalle [7]:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{z - z_0} &= \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \\ \frac{y - y_0}{z - z_0} &= \frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (34 \text{ a})$$

sekä kääntäen kuvalla maastoon:

$$\begin{aligned} \frac{X - X_0}{Z - Z_0} &= \frac{r_{11}(x - x_0) + r_{12}(y - y_0) + r_{13}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \\ \frac{Y - Y_0}{Z - Z_0} &= \frac{r_{21}(x - x_0) + r_{22}(y - y_0) + r_{23}(z - z_0)}{r_{31}(x - x_0) + r_{32}(y - y_0) + r_{33}(z - z_0)} \end{aligned} \quad (34 \text{ b})$$

Yhtälöissä $r_{11} \dots r_{33}$ ovat kiertomatriisin elementit, (X_0, Y_0, Z_0) kameran projektiokeskuksen koordinaatit, (X, Y, Z) maastopiste, (x_0, y_0) kuvan pääpiste, (x, y) kuvapiste ja $(z-z_0)$ on kameravakio*(-1) ($= -c$).

8.3 Katselupiste, -suunta ja suhteellinen liikkuminen T-matriisin avulla

Tämän kappaleen sovelluksia on käytetty vähemmän fotogrammetriassa, mutta konenäön puolella ja 3D-peliteollisuudessa hyvinkin yleisesti. Oletetaan, että katselija on pisteessä $P(X, Y, Z)$ ja katsoo tiettyyn suuntaan. Katseen suunta sisältyy homogeenisessa koordinaatistossa esitettyyn kolmiulotteiseen kiertomatriisiin R ja paikka matriisiin T . Nämä voidaan yhdistää samaan matriisiin [2]:

$$T_r = RT = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & 0 \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & X \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & Y \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Jos katseen suuntaa halutaan muuttaa kerrotaan matriisi uudella kiertomatriisilla:

$$T_{r_uusi} = R_{muutos} T_{r_vanha} \quad (36)$$

Liike kiertyneen koordinaatiston akselien suuntaisesti voidaan tehdä pienellä lisäyksellä. Kappaleessa 5 esitettiin, kuinka kiertomatriisin 1. rivi on kiertyneen x' -akselin, 2. rivi y' -akselin ja 3. rivi z -akselin yksikkövektorin projektiot alkuperäisessä x, y, z -koordinaatistossa. Riippuen siitä, minkä koordinaattiakselin suuntaisesti halutaan liikkua, voidaan kunkin rivin monikerta lisätä matriisiin T . Siirto x' -akselin suuntaisesti on

$$T_{x'_siirto} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X + n(r_{11}) \\ 0 & 1 & 0 & Y + n(r_{21}) \\ 0 & 0 & 1 & Z + n(r_{31}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (37 a)$$

siirto y' -akselin suuntaisesti on

$$T_{y'_siirto} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X + n(r_{12}) \\ 0 & 1 & 0 & Y + n(r_{22}) \\ 0 & 0 & 1 & Z + n(r_{32}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37 b)$$

ja siirto z' -akselin suuntaisesti on

$$T_{z\text{'_siirto}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X + n(r_{13}) \\ 0 & 1 & 0 & Y + n(r_{23}) \\ 0 & 0 & 1 & Z + n(r_{33}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (37 \text{ c})$$

Kertomalla matriisit R ja T_{siirto} saadaan siis matriisi, jolla pystyy siirtämään katselupistettä $n:n$ pituisin askelein kunkin kamerakoordinaattiakselin suunnassa tarvitsematta huolehtia kulmista.

Lähteet

[1] Church, E., 1948, Theory of Photogrammetry, No. 19 in a series of bulletins published by the department of photogrammetry Syracuse university, New York, 69 sivua.

[2] Gruber, D., 2000, The Mathematics of the 3D Rotation Matrix, Presented at the Xtreme Game Developers Conference, September 30-October 1, 2000, Santa Clara, California, <http://www.makegames.com/3drotation/>, sivu luettu 27.2.2002.

[3] Kraus, K., 1993, Photogrammetry, Volume 1, Fundamentals and Standard Process, Ferd. Dummlers Verlag, Bonn, 397 sivua.

[4] Kraus, K., 1997, Photogrammetry, Volume 2, Advanced Methods and Applications, Ferd. Dummlers Verlag, Bonn, 466 sivua.

[5] Kreyszig, E., 1993, Advanced Engineering Mathematics, Seventh edition, John Wiley & Sons Inc., Singapore.

[6] Moffit, F., E. Mikhail, 1980, Photogrammetry, Third Edition, Harper & Row, Publishers, New York, 648 sivua.

[7] Schwidefsky, K., F. Ackermann, 1976, Fotogrammetria; Perusteita, menetelmiä ja sovelluksia, Suom. E. Kilpelä, Otakustanatamo, Otaniemi, 384 sivua.

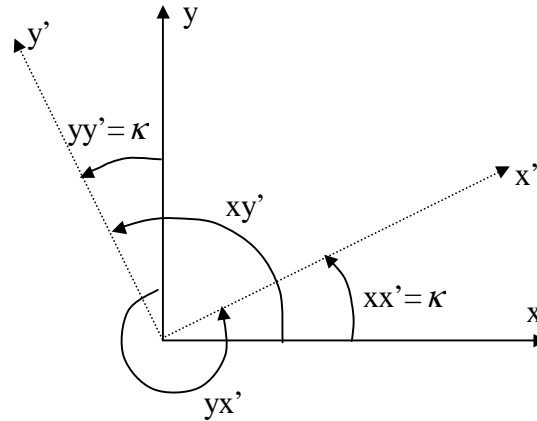
[8] Zhizhuo, W., 1990, Principles of Photogrammetry (With Remote Sensing), Publishing House of Surveying and Mapping, Beijing, 575 sivua.

Liite 1: Kaksiulotteisen kiertomatriisin johtaminen suuntakosinien avulla

xy-koordinaatiston kappa-kierto (z-akselin ympäri) myötäpäivään

Muodostetaan suuntakosinit (otetaan kosini akseleiden välisistä kulmista) alkuperäisen ja kiertyneen koordinaatiston koordinaattiakselien välille [1]:

	x	y	z
x'	$\cos(xx')$	$\cos(yx')$	$\cos(zx')$
y'	$\cos(xy')$	$\cos(yy')$	$\cos(zy')$
z'	$\cos(xz')$	$\cos(yz')$	$\cos(zz')$



Suuntakosinit kertovat muunnosvektorit alkuperäisestä koordinaatistosta uuteen koordinaatistoon: lausutaan esim. x' x:n, y:n ja z:n avulla.

Koordinaatistoa on kierretty κ :n verran, joten voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned}\cos(xx') &= \cos \kappa \\ \cos(yy') &= \cos \kappa\end{aligned}$$

Kuvasta voidaan lukea muiden akseleiden väliset kulmat:

$$\begin{aligned}xy' &= 100 \text{ gon} + \kappa \\ \Rightarrow \cos(xy') &= \cos(100 \text{ gon} + \kappa) = -\sin \kappa\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}yx' &= 300 \text{ gon} + \kappa \\ \cos(yx') &= \cos(300 \text{ gon} + \kappa) = \sin \kappa\end{aligned}$$

Z-akseli on 90 astetta eli 100 gon sekä x- että y-akselista:

$$\begin{aligned}xz' = yz' = zx' = zy' &= 100 \text{ gon} \\ \cos(100 \text{ gon}) &= 0\end{aligned}$$

Kulma $zz' = 0$, joten $\cos(zz') = \cos(0) = 1$.

Nyt voidaan koota kaksiulotteinen kiertomatriisi R_κ :

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös omega- ja phi-kierroille.

xy-koordinaatiston kappa-kierto (z-akselin ympäri) vastapäivään

Muodostetaan suuntakosinit alkuperäisen ja kiertyneen koordinaatiston koordinaattiakselien välille [1]:

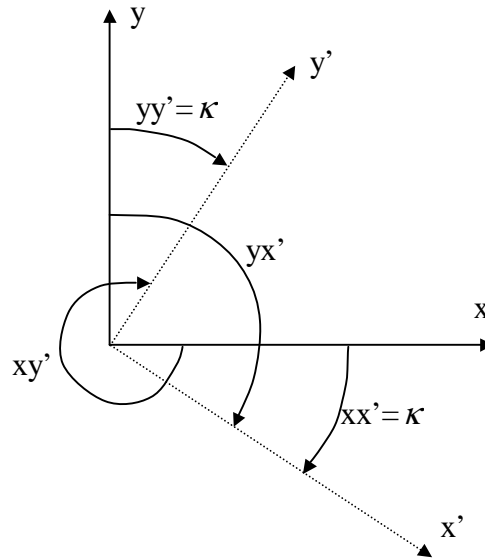
	x	y	z
x'	$\cos(xx')$	$\cos(yx')$	$\cos(zx')$
y'	$\cos(xy')$	$\cos(yy')$	$\cos(zy')$
z'	$\cos(xz')$	$\cos(yz')$	$\cos(zz')$

Suuntakosinit kertovat muunnosvektorin alkuperäisestä koordinaatistosta uuteen koordinaatistoon.

Koordinaatistoa on kierretty κ :n verran, joten voidaan kirjoittaa:

$$\cos(xx') = \cos \kappa$$

$$\cos(yy') = \cos \kappa$$



Kuvasta voidaan lukea muiden akseleiden väliset kulmat:

$$xy' = 300 \text{ gon} + \kappa$$

$$\Rightarrow \cos(xy') = \cos(300 + \kappa) = \sin \kappa$$

$$yx' = 100 \text{ gon} + \kappa$$

$$\cos(yx') = \cos(100 + \kappa) = -\sin \kappa$$

Z-akseli on 90 astetta eli 100 gon sekä x- että y-akselista:

$$xz' = yz' = zx' = zy' = 100 \text{ gon}$$

$$\cos(100 \text{ gon}) = 0$$

Kulma $zz' = 0$, joten $\cos(zz') = \cos(0) = 1$.

Nyt voidaan koota kaksiulotteinen kiertomatriisi R_κ :

$$R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös omega- ja phi-kierroille.

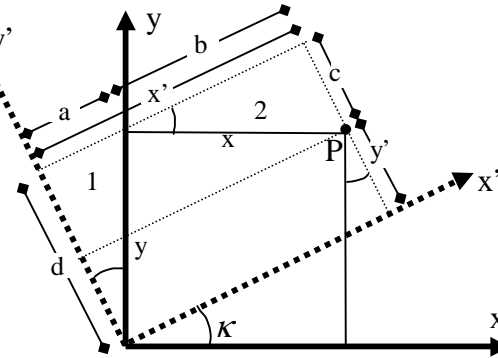
Liite 2: Kaksiulotteisen kiertomatriisin johtaminen geometrisesti

Kappa-kierto z-akselin ympäri myötäpäivään

Selvitetään yhteys alkuperäisen ja kiertyneen koordinaatiston välille:

$$\begin{cases} x' = ? \cdot x + ? \cdot y + 0 \cdot z \\ y' = ? \cdot x + ? \cdot y + 0 \cdot z \\ z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ? & ? & 0 \\ ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{\kappa}$$

Kuvan piste P näkyy sekä alkuperäisessä että kiertyneessä koordinaatistossa. Apuviivojen avulla on löydetty yhdenmuotoisia kolmioita, joiden avulla voidaan yhteys koordinaatistojen välille selvittää.



$$\begin{aligned} x' &= ? \cdot x + ? \cdot y = a + b \\ y' &= ? \cdot x + ? \cdot y = d - c \end{aligned}$$

Apukolmiosta 1 voidaan lukea:

$$\begin{aligned} a &= y \sin \kappa \\ d &= y \cos \kappa \end{aligned}$$

Apukolmioista 2 voidaan lukea:

$$\begin{aligned} b &= x \cos \kappa \\ c &= x \sin \kappa \end{aligned}$$

Nämä ryhmitellään x:n ja y:n mukaan, jolloin saadaan:

$$\begin{cases} x' = b + a = \cos \kappa x + \sin \kappa y \\ y' = -c + d = -\sin \kappa x + \cos \kappa y \end{cases}$$

Kolmiulotteisena yhteydet ovat nyt:

$$\begin{cases} x' = \cos \kappa x + \sin \kappa y + 0 \cdot z \\ y' = -\sin \kappa x + \cos \kappa y + 0 \cdot z \\ z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}$$

Kiertomatriisi voidaan kirjoittaa poimimalla x:n y:n ja z:n kertoimet:

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kappa-kierto z-akselin ympäri vastapäivään

Selvitetään yhteys alkuperäisen ja kiertyneen koordinaatiston välille:

$$\begin{cases} x' = ? \cdot x + ? \cdot y + 0 \cdot z \\ y' = ? \cdot x + ? \cdot y + 0 \cdot z \\ z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ? & ? & 0 \\ ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{\kappa}$$

Kuvan piste P näkyy sekä alkuperäisessä koordinaatistossa että kiertyneessä koordinaatistossa. Apuviivojen avulla on löydetty yhdenmuotoisia kolmioita, joiden avulla voidaan yhteys koordinaatistojen välille selvittää.

$$x' = ? \cdot x + ? \cdot y = b - a$$

$$y' = ? \cdot x + ? \cdot y = c + d$$

Apukolmiosta 1 voidaan lukea:

$$a = y \sin \kappa$$

$$d = y \cos \kappa$$

Apukolmioista 2 voidaan lukea:

$$b = x \cos \kappa$$

$$c = x \sin \kappa$$

Nämä ryhmitellään x:n ja y:n mukaan, jolloin saadaan:

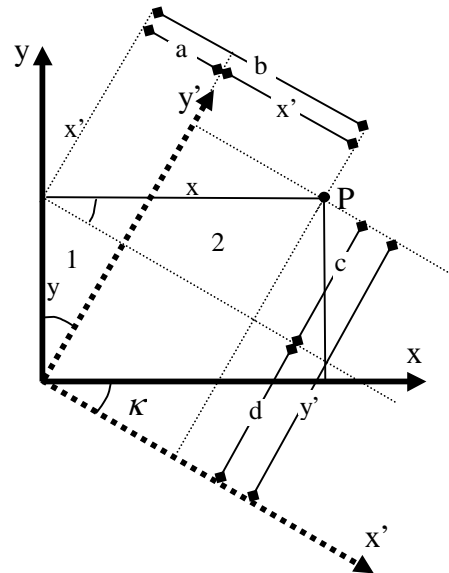
$$\begin{cases} x' = b - a = \cos \kappa x - \sin \kappa y \\ y' = c + d = \sin \kappa x + \cos \kappa y \end{cases}$$

Kolmiulotteisena yhteydet ovat nyt:

$$\begin{cases} x' = \cos \kappa x - \sin \kappa y + 0 \cdot z \\ y' = \sin \kappa x + \cos \kappa y + 0 \cdot z \\ z' = 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{cases}$$

Kiertomatriisi voidaan kirjoittaa poimimalla x:n y:n ja z:n kertoimet:

$$R_{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Liite 3. 3D kiertomatriisin laskeminen 2D osamatriiseista

Nimetään alkuperäinen piste $p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ja kierretty piste $p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$. Päätetään tehdä kierrot

järjestyksessä: omega, phi ja kappa. Kierretään pistettä tässä järjestyksessä kierto kerrallaan:

$$a' = R_{\omega} p$$

$$b' = R_{\phi} a'$$

$$p' = R_{\kappa} b'$$

Nyt yhdistetään saadut tulokset käänteisesti:

$$p' = R_{\kappa} b' = R_{\kappa} R_{\phi} a' = R_{\kappa} R_{\phi} R_{\omega} p.$$

Kolmiulotteinen kiertomatriisi siis tulee laskea käänteisessä järjestyksessä kiertojärjestykseen nähden. Kiertojärjestykselle omega, phi ja kappa saadaan 3D kiertomatriisi siis:

$$R_{\omega\phi\kappa} = R_{\kappa} R_{\phi} R_{\omega}$$

ja kierretty piste saadaan siis:

$$p' = R_{\kappa} R_{\phi} R_{\omega} p = R_{\omega\phi\kappa} p$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{bmatrix}$$

Matriisin muuttujat a, b ja c eivät ole geometrisesti helposti havainnollistettavissa, mutta pienillä kierroilla ne vastaavat $\omega\phi\kappa$ -kiertoja [7].