(P. Rönnholm / H. Haggrén, 28.9.2004)

Luento 4: Kiertomatriisi

Mitä pitäisi oppia?

- ymmärtää, että kiertomatriisilla voidaan kiertää koordinaatistoa
- ymmärtää, että kiertomatriisin vaaka- ja pystyrivit ovat yksikkövektoreita
- ymmärtää, että kiertomatriisia ei saa pelästyä
- ymmärtää, että samallekin kiertomatriisille voidaan antaa useita fysikaalisia tulkintoja
- ymmärtää, että hallitsemalla 3D kiertomatriisin voidaan toteuttaa helposti 3D pelien liikkumiset

AIHEITA

Kiertomatriisit fotogrammetriassa

- Kiertomatriisilla kierretään kohteen esitys koordinaatistosta toiseen.
- Kierto on yleensä kaksi- tai kolmiulotteinen.
- Kierto on yleensä jäykkä (karteesinen kierto), eli se tehdään ortogonaalisesti, jolloin kohteen muoto ja koko säilyvät ennallaan.
- Kiertomatriisit kohteen ja kuvan välillä $\boldsymbol{R}^*$ sekä kuvan ja kohteen välillä $\boldsymbol{R}$ ovat toisilleen käänteisiä, eli $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}^{-1} (= \boldsymbol{R}^T)$.
- Fotogrammetriassa käytettyihin karteesisiin koordinaatistomuunnoksiin sisältyy myös yleisesti origon siirto ja mittakaavan muutos.
- Kiertomatriisia käytetään fotogrammetriassa koordinaatistojen kiertämiseen eri yhteyksissä, joita ovat mm. seuraavat:
  - Koordinaatistomuunnos maastosta kuvalle, tehtävänä kuvakoordinaattien laskeminen.
  - Koordinaatistomuunnos kuvalta maastoon, tehtävänä kohdekoordinaattien laskeminen.
  - Stereomallin absoluuttiseen orientoimiseen, tehtävänä mallikoordinaatiston nivellointi eli mallikoordinaatiston kiertäminen vaakatasoon.

$$
\begin{aligned}
X &= \lambda(?\cdot x + ?\cdot y + ?\cdot z) + X_0 \\
Y &= \lambda(?\cdot x + ?\cdot y + ?\cdot z) + Y_0 \\
Z &= \lambda(?\cdot x + ?\cdot y + ?\cdot z) + Z_0
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
X &= \lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_0 \\
Y &= \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_0 \\
Z &= \lambda(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_0
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad X = \lambda R_{i\_to\_o} x + X_0
$$

Kolmiulotteinen yhdenmuotoisuusmuunnos kamerakoordinaateista kohdekordinaatistoon kirjoitettuna eri tavoilla.

Ortogonaliteettiehdot

- Kohde voidaan muuntaa yhdestä 3-D koordinaatistosta toiseen siirtämällä ja kiertämällä. Muunnoksessa siirtoja on kolme: X-, Y- ja Z-siirto, samoin kiertoja: X-, Y- ja Z-kierto. Kiertäminen esitetään 3 x 3 kiertomatriisilla. Nämä 9 alkiota ovat suuntakosineita, joilla 'vanhat' X-, Y- ja Z-komponenttivektorit projisoidaan kukin uuden vektorin X-, Y- ja Z-komponenteiksi.
- Ortogonaaliehdot voidaan lausua yhtälöinä suuntakosinien välillä ja niillä huolehditaan siitä, että kohteen muoto ei muutu, kun sitä kierretään. Ortogonaaliehdot ovat:
    1. Yksittäisen komponenttivektorin pituus ei saa muuttua projisioinnin aikana.
    2. Komponenttivektoreiden tulee olla projisioinnin jälkeenkin kohtisuorassa toisiaan vastaan.

$$
\begin{aligned}
a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\
a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1 \\
a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Näillä kolmella ehdolla varmistutaan siitä, että kiertomatriisin (kohteesta kuvalle) rivivektorit kuvaavat yksikkövektoreita (**normality constraints**). Vastaavat ehdot ovat voimassa myös sarakkeille (vastaa kiertomatriisin rivejä kuvalta kohteeseen). Jokaisen rivin ja sarakkeen elementtien neliöiden summa on siis yksi.

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,a_{21} + a_{12}\,a_{22} + a_{13}\,a_{23} &= 0 \\
a_{11}\,a_{31} + a_{12}\,a_{32} + a_{13}\,a_{33} &= 0 \\
a_{21}\,a_{31} + a_{22}\,a_{32} + a_{23}\,a_{33} &= 0
\end{aligned}
$$

Näillä kolmella ehdolla varmistutaan siitä, että kiertomatriisin (kuvalta kohteeseen) rivivektorit säilyvät muunnoksen aikana kohtisuorassa toisiinsa nähden (**othogonality constraints**). Vastaavat ehdot ovat voimassa myös sarakkeille (vastaa kiertomatriisin rivejä kohteesta kuvalle).

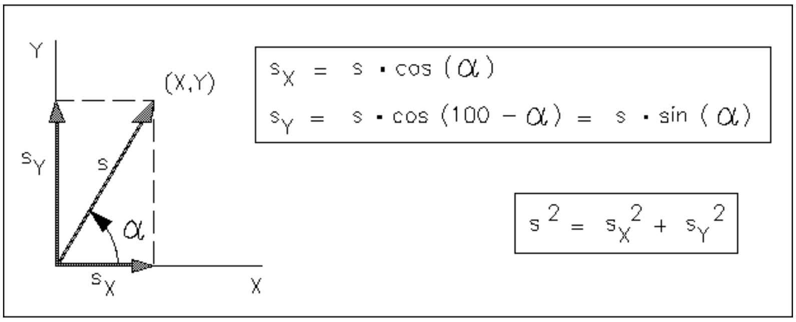
Koska ortogonaliteettiehdot ovat voimassa kiertomatriisille, sen käänteismatriisi on sama kuin transpoosi (paljon helpompi laskea) $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{T}$.

Kiertomatriisit suuntakosinein

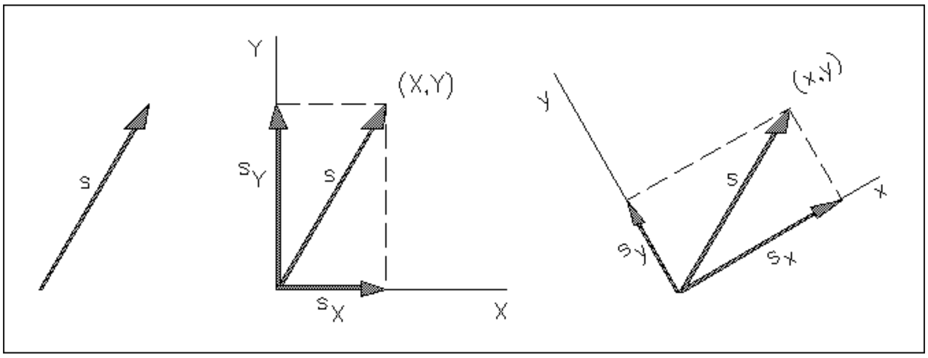
- Kiertomatriisien alkioissa kulmat luetaan koordinaattiakselien välisinä kulmina, esimerkiksi kulma "Xx" on kulma kohdekoodinaatiston X-akselin ja kamerakoordinaatiston x-akselin välillä. Suuntakosini "cos Xx" projisioi kohdekoordinaatiston X-komponentin kamerakoordinaatiston x-akselille. Kamerakoordinaatti x muodostuu, kun tähän projisioidaan lisäksi kohdekoordinaatiston Y- ja Z-koordinaatit.
- Suuntakulmia on tässä yleisessä esitystavassa yhtä monta kuin kiertomatriisin alkioita eli yhdeksän. Jos koordinaatistot ovat suorakulmaisia kuten yleisesti esitetään, kiertomatriisin alkioiden välillä on kuusi kohtisuoruus- eli ortogonaliteettiehtoa. Tällainen kiertomatriisi voidaan esittää kolmen kulman avulla, esimerkiksi omega, fii ja kappa, tai alfa, nyy ja kappa.

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos Xx & \cos Yx & \cos Zx \\ \cos Xy & \cos Yy & \cos Zy \\ \cos Xz & \cos Yz & \cos Zz \end{bmatrix}_i \qquad R = \begin{bmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos ZY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{bmatrix}_i$$

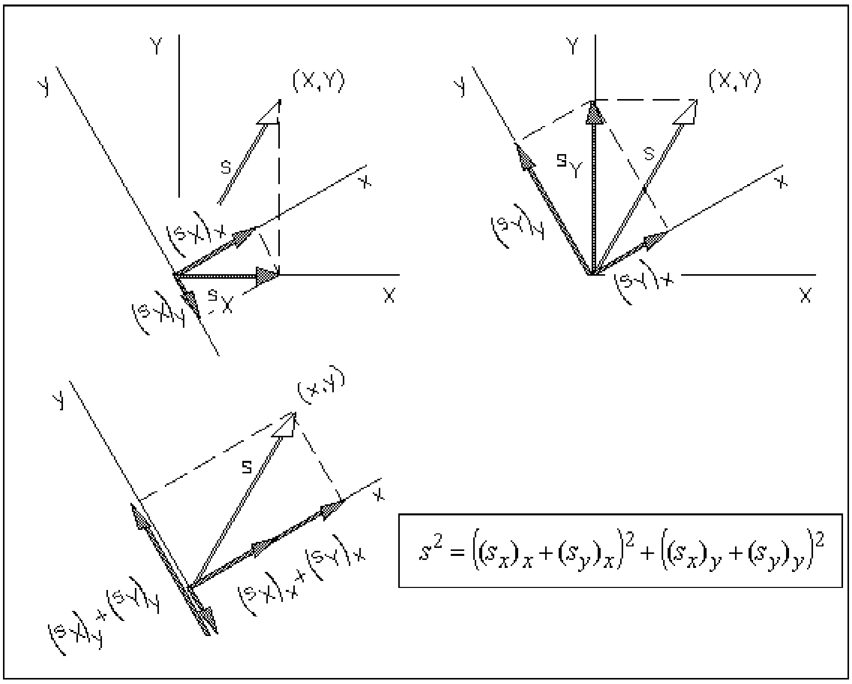
Kiertomatriisit suuntakosinein kohteelta kuvalle (***R^T***) ja kuvalta kohteelle(***R***).



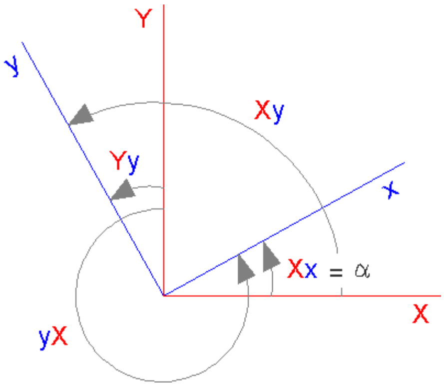
Vektorin s projisiointi karteesisen 2-D koordinaatiston koordinaattiakseleille.



Kuvavektorin s projisiointi XY koordinaatistoon tai xy-koordinaatistoon.



Kuvavektorin s projisiointi xy-koordinaatistoon koordinaatiston XY kautta.



Kiertokulmat ja kiertomatriisi 2-D koordinaatiston muunnoksessa.

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos(Xx) & \cos(Yx) \\ \cos(Xy) & \cos(Yy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(300+\alpha) \\ \cos(100+\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2D kiertomatriisi rakennettuna suuntakosinien ja kiertokulman avulla. Fotogrammetrian kuvausyhtälöissä kierrot kuvataan positiivisina kiertoina, kun muunnos tehdään kohteesta kuvalle. Tätä kiertomatriisia merkitään $\boldsymbol{R}^T$. Muunnoksissa kuvilta kohteelle kiertomatriisit merkitään $\boldsymbol{R}$.

Kiertomatriisi R* kohteesta kuvalle mukana kiertyvien akseleiden ympäri

$$R_{o\_to\_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i$$

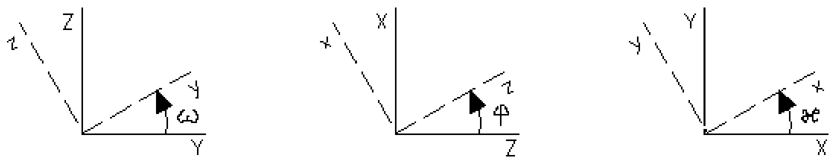
$$R_{o\_to\_i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\varkappa & \cos\omega\sin\varkappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\varkappa & \sin\omega\sin\varkappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\varkappa \\ -\cos\varphi\sin\varkappa & \cos\omega\cos\varkappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\varkappa & \sin\omega\cos\varkappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\varkappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Kiertomatriisi R kuvalta kohteeseen mukana kiertyvien akseleiden ympäri

$$R_{i\_to\_o} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_i$$

$$R_{i\_to\_o} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\varkappa & -\cos\varphi\sin\varkappa & \sin\varphi \\ \cos\omega\sin\varkappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\varkappa & \cos\omega\cos\varkappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\varkappa & -\sin\omega\cos\varphi \\ \sin\omega\sin\varkappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\varkappa & \sin\omega\cos\varkappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\varkappa & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix}$$

3D kiertomatriisin rakentaminen 2D kiertomatriiseista



$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varkappa & \sin\varkappa \\ -\sin\varkappa & \cos\varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Osakiertomatriisit omega, fii ja kappa kohteesta kuvalle. Kaikki kierrot ovat myötäpäivään ja koordinaatisto on oikeakätinen. Huomaa: jos kierrot (tai joku kierto) päätettäisiin tehdä vastapäivään tai käytössä olisi vasenkätinen koordinaatisto, tulos olisi toinen. Erilaisista kiertomatriisin määrityksistä johtuvat suurimmat väärinkäsitykset muunnoksissa. Esimerkiksi konenäössä suositaan usein vasenkätistä koordinaatistoa.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos Xx & \cos Yx \\ \cos Xy & \cos Yy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Kuvakoordinaatiston kierto XY-koordinaatistosta xy-koordinaatistoon suuntakosinenin ilmaistuna.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX \\ \cos xY & \cos yY \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Kuvakoordinaatiston kierto xy-koordinaatistosta XY-koordinaatistoon suuntakosinenin ilmaistuna.

$$R_{o\_to\_i}\,\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

$$R_{o\_to\_i}\,\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$R_{o\_to\_i}\,\kappa = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osakiertomatriisit omega, fii ja kappa kohteesta kuvalle. Kolmas ulottuvuus on otettu mukaan jo tässä vaiheessa, jotta yhdistäminen onnistuisi oikein.

$$R_{o\_to\_i} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

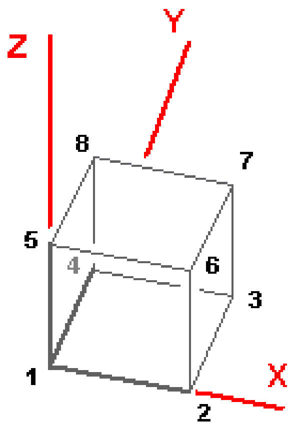
$$= \begin{pmatrix} \cos\kappa & \sin\kappa & 0 \\ -\sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\omega & -\sin\varphi\cos\omega \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\omega & \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\kappa\cos\varphi & \cos\kappa\sin\varphi\sin\omega + \sin\kappa\cos\omega & -\cos\kappa\sin\varphi\cos\omega + \sin\kappa\sin\omega \\ -\sin\kappa\cos\varphi & -\sin\kappa\sin\varphi\sin\omega + \cos\kappa\cos\omega & \sin\kappa\sin\varphi\cos\omega + \cos\kappa\sin\omega \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\omega & \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix}$$

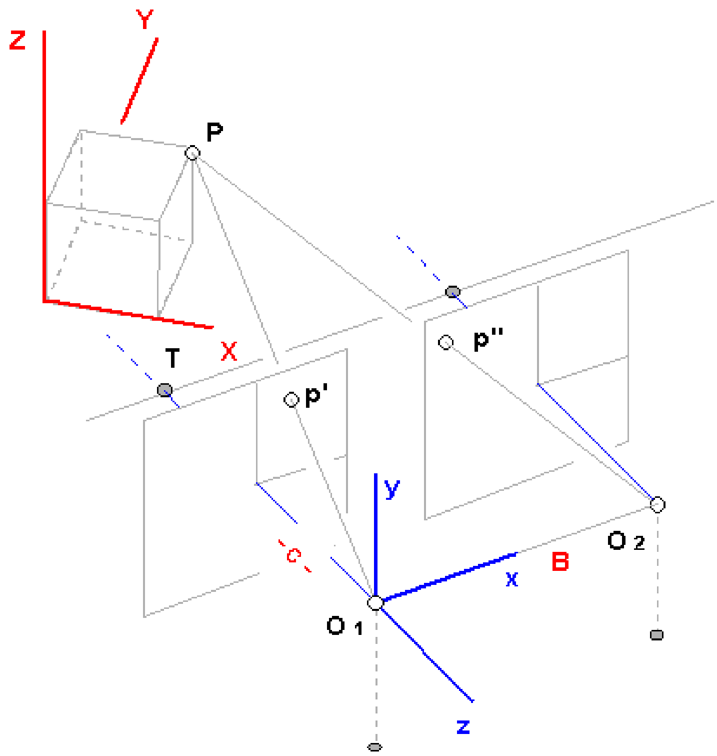
3-D kiertomatriisin muodostaminen peräkkäisistä 2-D kierroista X-, Y- ja Z-akselien ympäri. Tässä tapauksessa kierrot on tehty järjestyksessä: omega, fii, kappa. Huomaa, että osamatriisien kertomisjärjestys on käänteinen!

Kiertomatriisin määrittäminen kuvaussuunnan perusteella

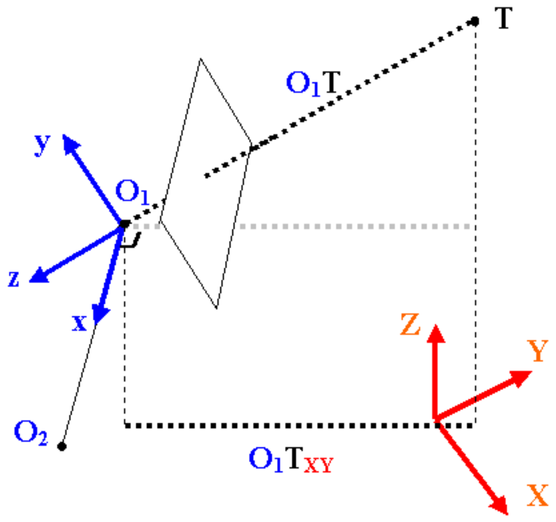
	X	Y	Z
1	0	0	0
2	100	0	0
3	100	100	0
4	0	100	0
5	0	0	100
6	100	0	100
7	100	100	100
8	0	100	100



Kohde ja kohdekoordinaatisto.



Kameran orientointi määritellään tässä kuvanottopaikan **O1** ja kuvaussuuntaan sijaitetun tähtäyspisteen **T** mukaan. Kamerakoordinaatisto **xyz** sijoitetaan kuvanottopaikkaan ja projektiokeskus **O1** on origona. Kuvataso toimii koordinaatiston **xy**-tasona ja kuvasivu asetetaan horisontin suuntaan. Tällöin **x**-akseli suuntautuu kuvaussuuntaan nähden oikealle pisteeseen **O2** ja **y**-akseli ylös. Koska koordinaatisto on oikeakätinen, **z**-akseli osoittaa kuvaussuunnasta kohteesta kameraan eli katsojaan päin. Oheisessa piirroksessa kameramallina on stereokamera **O1O2**, kameravakio **c** ja kuvakanta **B**. Kuvausgeometria vastaa stereokuvauksen normaalitapausta.



Seuraavassa taulukossa esitettyjen merkintöjen selvennys. Kuva ei täysin vastaa taulukon lukuarvoja, mutta periaate on sama. Vektoreiden yksikkövektoreita on merkitty taulukoissa pienellä u-kirjaimella.

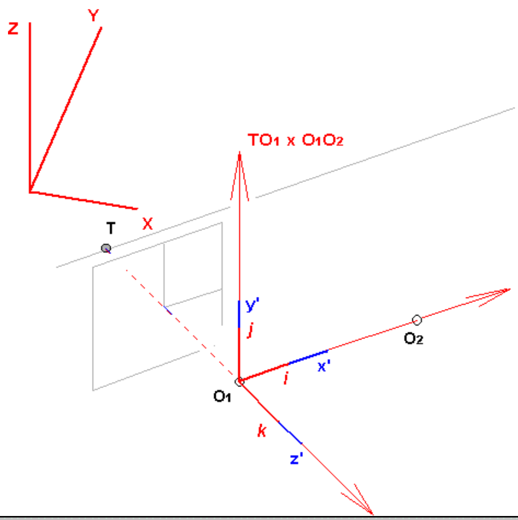
	X	Y	Z
O	-160	-280	160
T	50	50	50

c	120
B	30

	i	j	k
O1T	210	330	-110
O1T XY	210	330	
O1T XY u	0,536875	0,843661	
O1O2 u	0,843661	-0,53688	0
O1O2	25,30984	-16,1063	0

	X	Y	Z	x	y	z
T	50	50	50	0	0	-406,325
O1	-160	-280	160	0	0	0
O2	-134,69	-296,106	160	30	0	0

Sekä kamera- että kohdekoordinaatisto määrittyvät kolmessa yhteisessä pisteessä **T**, **O1** ja **O2**. Selvitetään ensin pisteiden **O1** ja **T** välinen vektori. Tarkastellaan tämän vektorin vaakaprojektiota kohdekoordinaatiston **XY**-tasossa. Jakamalla vektori pituudellaan saadaan sen yksikkövektori (pituus siis on yksi). Kuvausjärjestelyn mukaan kuvasivu asetettiin horisontin suuntaiseksi. Tällä perusteella voidaan todeta, että tähtäysvektorin tasoprojektio on suorassa kulmassa kameran **x**-akselin suhteen. Näin on saatu selville **x**-akselin suunta yksikkövektorina. Kertomalla **x**-akselin suuntainen yksikkövektori kannan pituudella saadaan selville suhteellinen vektori pisteiden **O1** ja **O2** välille (suunta ja pituus oikeat). Lopuksi toisen kuvan projektiopiste **O2** muutetaan kohdekoordinaatistoon lisäämällä **O1O2** **O1**:een. Tähtäyspisteen **T** etaisyys kamerakoordinaatistossa (**x**,**y**,**z**) projektiokeskusksesta **O1** saadaan laskemalla vektorin **O1T** pituus. Etäisyys on negatiivinen, koska kameran **z**-akseli kasvaa kuvaussuunnasta poispäin.



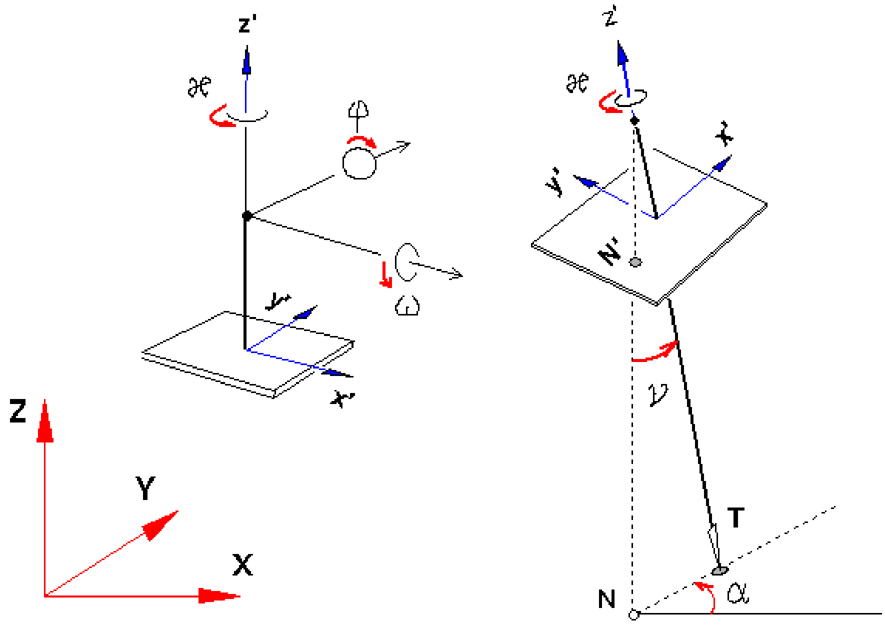
	X	Y	Z	x	y	z
T	50	50	50	0	0	-406,325
O1	-160	-280	160	0	0	0
O2	-134,69	-296,106	160	30	0	0
TO1	-210	-330	110	0	0	406,325
O1O2	25,30984	-16,1063	0	30	0	0
TO1xO1O2	1771,689	2784,083	11734,56	0	12189,75	0

		X	Y	Z	x	y	z
i	O1O2 u	0,843661	-0,53688	0	1	0	0
j	TO1xO1O2 u	0,145343	0,228395	0,962658	0	1	0
k	TO1 u	-0,51683	-0,81216	0,270719	0	0	1
		R object-to-camera			R camera-to-camera		

Kohde- ja kamerakoordinaatistojen välinen yhteys voidaan kuvata lausumalla vektorien ***O1O2***, ***TO1xO1O2***, ja ***TO1*** suuntaiset yksikkövektorit kummassakin koordinaatistossa. Tällöin kohteen yksikkövektorit ***ijk*** vastaavat koordinaatistojen välistä kiertomatriisia ***R**object-to-camera* ja kameran yksikkövektorit sen kantavektoreita ***ijk***. Vektori ***TO1xO1O2*** on siis kohtisuorassa vektorien ***O1O2*** ja ***TO1*** virittämän **xz**-tason suhteen.

$$R_{o\_to\_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i$$

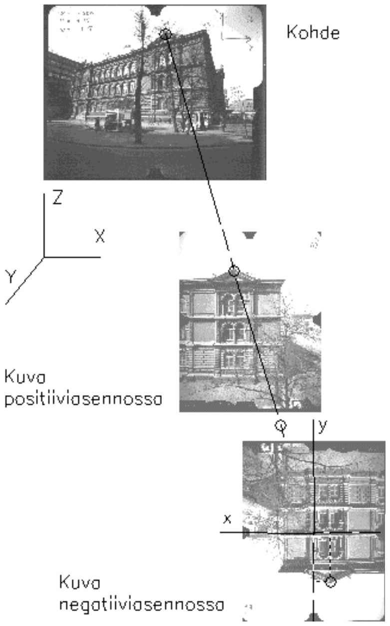
0,843661	-0,53688	0
0,145343	0,228395	0,962658
-0,51683	-0,81216	0,270719

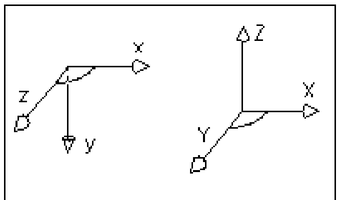


a11	=	COS(phi)*COS(kappa)
a12	=	COS(phi)*SIN(kappa)
a13	=	SIN(phi)
a21	=	COS(omega)*SIN(kappa)+SIN(omega)*SIN(phi)*COS(kappa)
a22	=	COS(omega)*COS(kappa)-SIN(omega)*SIN(phi)*SIN(kappa)
a23	=	-SIN(omega)*COS(phi)
a31	=	SIN(omega)*SIN(kappa)-COS(omega)*SIN(phi)*COS(kappa)
a32	=	SIN(omega)*COS(kappa)+COS(omega)*SIN(phi)*SIN(kappa)
a33	=	COS(omega)*COS(phi)
a11	=	COS(alpha)*COS(kappa)+SIN(alpha)*COS(nyy)*SIN(kappa)
a12	=	-COS(alpha)*SIN(kappa)+SIN(alpha)*COS(nyy)*COS(kappa)
a13	=	-SIN(alpha)*SIN(nyy)
a21	=	-SIN(alpha)*COS(kappa)+COS(alpha)*COS(nyy)*SIN(kappa)
a22	=	SIN(alpha)*SIN(kappa)+COS(alpha)*COS(nyy)*COS(kappa)
a23	=	-COS(alpha)*SIN(nyy)
a31	=	SIN(nyy)*SIN(kappa)
a32	=	SIN(nyy)*COS(kappa)
a33	=	COS(nyy)

	radians	degrees	gons
alfa (13)	-0,56673	-32,4712	-36,0791
alfa (23)	0,566729	32,47119	36,0791
nyy	1,296656	74,29293	82,5477
kappa (31)	0	0	0
kappa (32)	0	0	0
omega	1,249046	71,56505	79,51672
phi	-0,54314	-31,1197	-34,5774
kappa	-0,1706	-9,77473	-10,8608

Laskuesimerkkejä





$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Likimääräisen kiertomatriisin esittäminen kohteelta kuvalle. Huomaa, että koordinaatistot ovat vasenkätisiä, millä ei tässä tarkastelussa ole merkitystä. Koordinaatistokuvasta nähdään, että X- ja x-koordinaattiakselit kasvavat samaan suuntaan. Tällöin uudet x-koordinaatit saavat arvot suoraan vanhoista X-koordinaateista eli kiertomatriisin vasen yläalkio saa arvon 1. Uudet y-koordinaatit saavat arvoikseen vanhojen Z-koordinaattien vastaluvut eli oikea keskirivin alkioista saa arvon -1. Uusiksi z-koordinaateiksi tulevat vanhat Y-koordinaatit sellaisenaan eli keskimmäinen alarivin alkioista saa arvon 1. Loput alkiot ovat nollia.

Example Input

	[degrees]	[gons]	[radians]
kappa	359.9921	399.9912	6.283047
phi	3.8421	4.269	0.067057
omega	-90.0151	-100.017	-1.57106

R* =

0.997752	-0.06701	0.000156
0.000138	-0.00027	-1
0.067007	0.997752	-0.00026

R =

0.997752	0.000138	0.067007
-0.06701	-0.00027	0.997752
0.000156	-1	-0.00026

Sama kiertomatriisi laskettuna tarkoista kulmasuureista. Kiertomatriisi R* vastaa yllä esitettyä likimääräistä kiertomatriisia kohteelta kuvalle.

	[degrees]	[gons]	[radians]
kappa = ATAN(-a12/a11)	-0.00792	**-0.0088**	-0.00014
phi = ASIN(a13)	3.8421	**4.269**	0.067057
omega = ATAN(-a23/a33)	89.98488	**99.9832**	1.570532

Kiertokulmien arvot voidaan laskea kiertomatriisin alkioista. Kulmien likiarvoja on vaikea päätellä kuvasta, mutta ne saadaan yllä esitetyn likiarvoisen kiertomatriisin kautta.

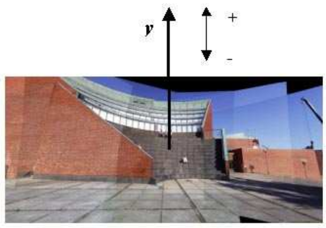
	[degrees]	[gons]	[radians]
kappa = ATAN(a31/a32)	-0.00893	**-0.00993**	-0.00016
alpha = ATAN(a13/a23)	3.8421	**4.269**	0.067057
nyy = ACOS(a33)	90.01509	**100.0168**	1.57106

Joissain tapauksissa kuvan ulkoisen orientoinnin kulmat esitetään kuvakierron (kappa) sekä suurimman kallistuksen suunnan (alpha) ja suuruuden (nyy) avulla. Myös nämä voidaan laskea kiertomatriisin alkioista.

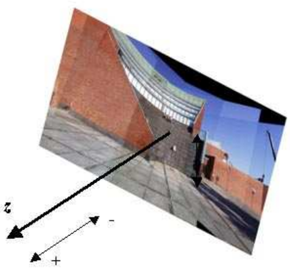
Siirrot kohdekoordinaatistossa kamerakoordinaatiston akselien suunnassa

Liikkumiseen virtuaalisessa kolmiulotteisessa maailmassa on tarvitaan työkaluja. Tilanne vastaa täysin kameran paikan (katselupisteen) siirtoa. Liikkuminen on helpointa, jos vaihtoehtoina ovat siirrot: vasemmalle, oikealle, ylös, alas, eteen ja taakse. Jos katsomissuunta on jonkin kohdekoordinaatiston akselin suuntainen, tilanne on helppo (muutetaan suoraan kohdekoordinaatteja). Katsottaessa vapaasti valittuun suuntaan tilanne on toinen. Jos nämä liikkeet ajatellaan kamerakoordinaatistossa, kyseessä ovat kamerakoordinaatiston akselien suunnat. Tehtävänä on siis selvittää kamerakoordinaatiston akselien suunnat kohdekoordinaatistossa. Ratkaisu sisältyy suoraan kolmilotteiseen kiertomatriisiin.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{x-siirretty} = n \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{alkuperäinen}$$



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{y-siirretty} = n \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{alkuperäinen}$$



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{z-siirretty} = n \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{alkuperäinen}$$

Kiertomatriisista otettu sarake on yksikkövektori eli sen pituus on yksi. Näin parametri *n* määrittää, kuinka monta kohdekoordinaatiston yksikön siirtoa halutaan tehdä (kamerakoordinaatiston jonkun akselin suunnassa). Esimerkiksi, jos yksikkönä on metri ja haluttaisiin edetä yhden cm siirroilla, *n*:n arvo olisi 0.01.
