

Luento 5: Kuvakoordinaattien laskeminen ja eteenpäinleikkaus

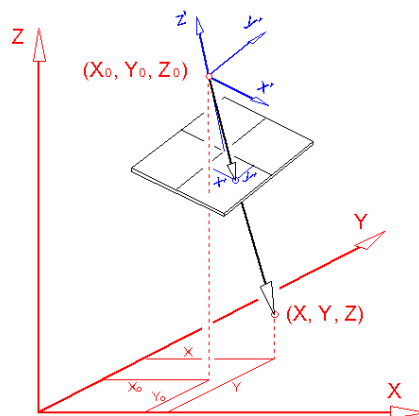
Mitä pitäisi oppia?

- Nyt pitäisi viimeistään ymmärtää, miten kollineaarisuusyhtälöillä kuvataan kameran paikka ja tähtäyssuunta
- ymmärtää, miten voidaan määritellä havaintovektori
- ymmärtää mitakaavan tärkeys kollineaarisuusyhtälöissä
- ymmärtää, mitä eteenpäinleikkaus tarkoittaa

AIHEITA

- [Kuvakoordinaattien laskeminen](#)
- [Siirtojen ja kiertojen vaikutus](#)
- [Laskuesimerkki](#)
- [Eteenpäinleikkaus](#)
- [Eteenpäinleikkaus yleisesti](#)
- [Eteenpäinleikkaus konvergenttikuvaparilla](#)
- [Eteenpäinleikkaus stereomallilla](#)
- [Laskuesimerkki](#)
- [Eteenpäinleikkaus stereokuvauksen normaalitapauksessa](#)

Kuvakoordinaattien laskeminen



Kollineaarinen havaintovektori (musta nuoli) lähtee projektiokeskuksesta, kulkee kuvapisteen läpi ja jatkaa siitä kohdepisteeseen. Kun kuvan sijainti (X_0, Y_0, Z_0) ja 3D kiertomatriisi määrittävät kameran ja kuvan paikan ja asennon 3D tilassa, kuvahavainnot (tai 3D kohdepiste) määrittävät havaintovektorin suunnan. Havaintovektorin mittakaavaluvulla voidaan päättää, kuinka pitkälle havaintovektoria seuraataan (onko siis esim. kyse kuvapistestä vai 3D kohdepisteestä).

- Kuvautumisyhtälöt kohteesta kuvalle ja kiertomatriisi kohdekoordinaatistosta kamerakoordinaatistoon

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{pi} = \frac{1}{\lambda_{pi}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} X_P - X_0 \\ Y_P - Y_0 \\ Z_P - Z_0 \end{bmatrix}_i, \text{ missä}$$

$$R_{o_{to}_i} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}_i$$

ja sama eri esitysmuodossa:

$$x'_{pi} = \frac{1}{\lambda_{pi}} (a_{11i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{21i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{31i} [Z_{Pi} - Z_{0i}])$$

$$y'_{pi} = \frac{1}{\lambda_{pi}} (a_{12i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{22i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{32i} [Z_{Pi} - Z_{0i}])$$

$$z'_{pi} = \frac{1}{\lambda_{pi}} (a_{13i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{23i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{33i} [Z_{Pi} - Z_{0i}])$$

- Koska z' kasvaa kamerasen tähtäysuuntaan vastakkaisesti ja kameravakio vastaa projektiokeskuksen etäisyyttä kuvatasosta, merkitään

$$z'_{pi} = -c$$

- Sijoittamalla tämä yhtälöryhmän alimpaan " $z'_{pi} = -c$ " -lausekkeeseen saadaan **mittakaavaluku** kuvapisteen kamerakoordinaateille. Mittakaavaluku määrittää, kuinka pitkälle täytyy seurata havaintovektoria (katso kuva) kunnes se leikkaa kuvatasoa (eli saadaan kuvakoordinaatti selville)

$$\lambda_{pi} = \frac{1}{-c} (a_{13i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{23i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{33i} [Z_{Pi} - Z_{0i}])$$

- Kamerakoordinaatit saadaan sijoittamalla saatu mittakaavaluku yhtälöryhmämme kahteen ylempään yhtälöön. Näin on saatu kollineaarisuusyhtälöt johdettua ehkä tunnetuimpaan muotoonsa

$$x'_{pi} = -c \frac{a_{11i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{21i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{31i} [Z_{Pi} - Z_{0i}]}{a_{13i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{23i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{33i} [Z_{Pi} - Z_{0i}]}$$

$$y'_{pi} = -c \frac{a_{12i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{22i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{32i} [Z_{Pi} - Z_{0i}]}{a_{13i} [X_{Pi} - X_{0i}] + a_{23i} [Y_{Pi} - Y_{0i}] + a_{33i} [Z_{Pi} - Z_{0i}]}$$

Siirtojen ja kiertojen vaikutus

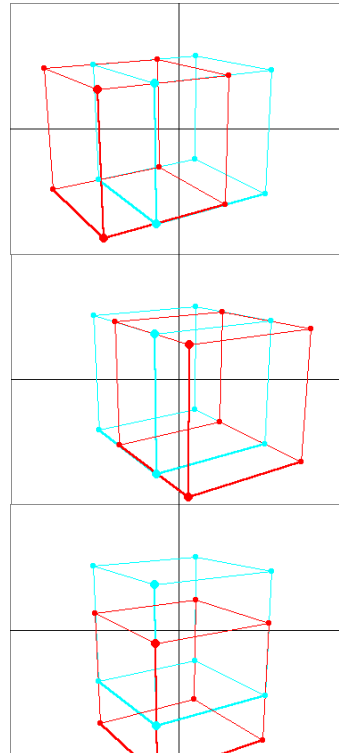
- [alfa_nyy_kappa.xls](#)
- [kappa_phi_omega.xls](#)

siirrot

	X	Y	Z
O'	-160	-280	160
T'	50	50	50
dO'', dT''	40	0	0
O''	-120	-280	160
T''	90	50	50

	X	Y	Z
O'	-160	-280	160
T'	50	50	50
dO'', dT''	0	40	0
O''	-160	-240	160
T''	50	90	50

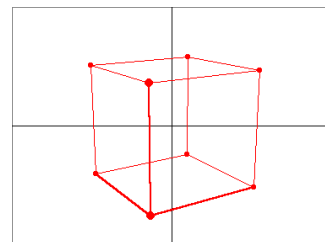
	X	Y	Z
O'	-160	-280	160
T'	50	50	50
dO'', dT''	0	0	40
O''	-160	-280	200
T''	50	50	90



Kierrot

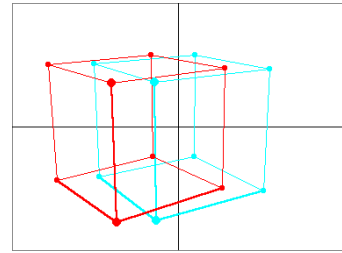
	angle'	dangle''
alfa	32,47119	0
nyy	74,29293	0
kappa	0	0

a11	a21	a31
a12	a22	a32
a13	a23	a33
0,843661	-0,53688	0
0,145343	0,228395	0,962658
-0,51683	-0,81216	0,270719



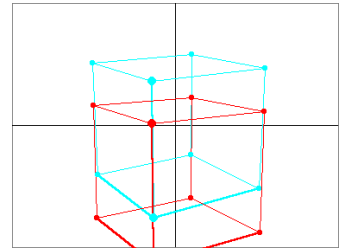
	angle°	dangle°
alfa	32,47119	5
nyy	74,29293	0
kappa	0	0

a11	a21	a31
a12	a22	a32
a13	a23	a33
0,793659	-0,60836	0
0,164695	0,214859	0,962658
-0,58565	-0,76402	0,270719



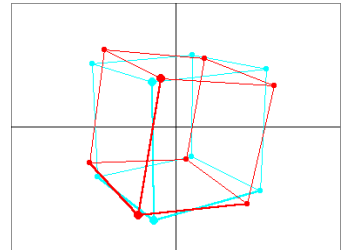
	angle°	dangle°
alfa	32,47119	0
nyy	74,29293	5
kappa	0	0

a11	a21	a31
a12	a22	a32
a13	a23	a33
0,843661	-0,53688	0
0,099745	0,156742	0,98259
-0,52753	-0,82897	0,185788



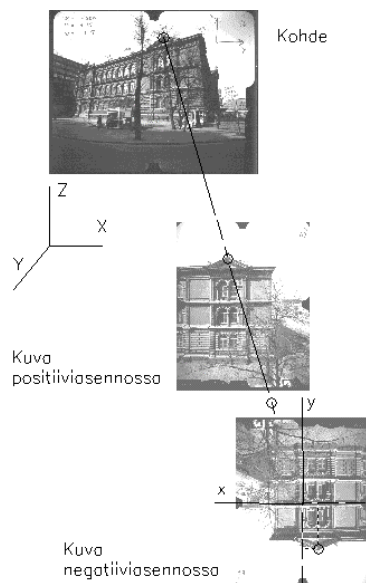
	angle°	dangle°
alfa	32,47119	0
nyy	74,29293	0
kappa	0	10

a11	a21	a31
a12	a22	a32
a13	a23	a33
0,856083	-0,48906	0,167164
-0,00337	0,318153	0,948033
-0,51683	-0,81216	0,270719



Laskuesimerkki

- Ateneum, pisteen 1301 kamerakoordinaatit kuvalle 57



- Lähtötiedot: kohdepisteen koordinaatit, kameras ulkoinen orientointi ja kameravakio (piste 57 on kuvan projektiokeskus)

Kohdekoordinaatit [m] :

	X	Y	Z
1301	18444.648	49746.114	22.615
57	18448.842	49764.891	13.415

Kierrot [gon] :

	OMEGA	FII	KAPPA
57	-100.0168	4.2690	399.9912

Kameravakio $c = 60.16$ mm

- Kamerakoordinaatiston määritelmän mukaan voidaan merkitä kaikille pisteille

$$z = -60.16$$

- Pisteen mittakaavaluku

$$\lambda = \frac{1}{-60.16} \begin{pmatrix} .087007051 & .997752487 & -0.00283301 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4.194 \\ -18.777 \\ 9.200 \end{pmatrix}$$

- Pisteen 1301 kuvamittakaavaksi kuvalle 57 tulee 1:316, mikäli kohdekoordinaattien yksikkönä on metri ja kuvakoordinaattien yksikkönä millimetri.
- Pisteen kamerakoordinaatit (z on siis -60.16 mm)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} .997752492 & -.067007011 & .000155913 \\ .000137919 & -.000273156 & -.999999953 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4.194 \\ -18.777 \\ 9.200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.252 \\ -29.088 \end{pmatrix}$$

- Jos piste havaitaan ja mitataan kovalta, havaitut kamerakoordinaatit poikkeavat lasketuista kamerakoordinaateista. Tätä eroa kutsutaan jäännösvirheeksi. Jäännösvirhe voi selittyä kuvanmittauksen havaintovirheellä, ulkoisen orientoinnin epätarkkuudella, sisäisen orientoinnin puutteellisuudella (esim. linssivirheet, virheellinen kameravakio tai pääpisteen sijainti) tai ulkoisilla tekijöillä (esim. valonsäteen kaartuminen ilmakehässä)

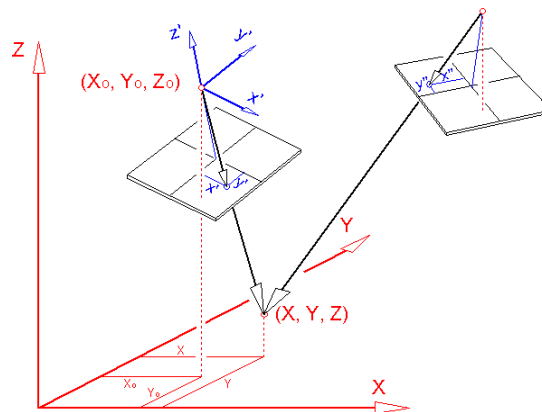
	Havaittu	Laskettu	Jäännösvirhe
x	-9.258	-9.252	-.006
y	-29.078	-29.088	.010

Eteenpäinleikkaus avaruudessa

Eteenpäinleikkaus

- Eteenpäinleikkauksella määritetään uuden kohdepisteen avaruuskoordinaatit. Toiminto kuuluu osana fotogrammetrian ns. päätehtävään eli kohteen rekonstruoimiseen kahden tai useamman sädekimpun avulla. Käsittelemme tässä fotogrammetrian päätehtävää ensin yleisessä tapauksessa ja sen jälkeen kuvaparin tapauksessa.
- Eteenpäinleikkaus tehdään orientoiduilta kuvilta. Orientointina käy joko kuvaparin keskinäinen orientointi mallikoordinaatistossa tai kummankin kuvan ulkoinen orientointi kohdekoordinaatistossa.

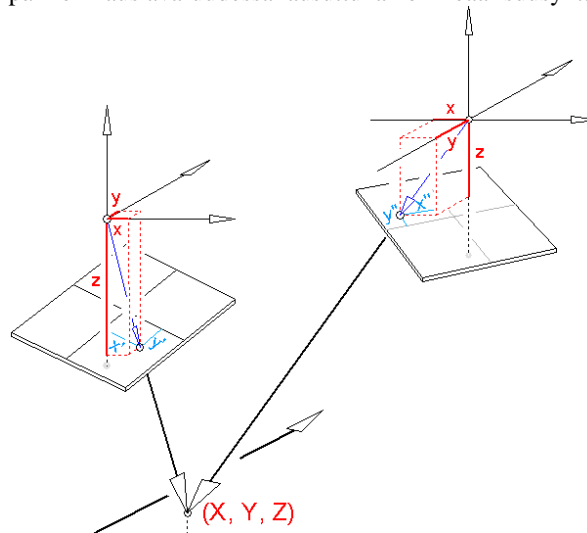
- Eteenpäinleikkauksessa määritetään kolme kohdekoordinaattia kahden kuvan yhteensä neljästä havainnosta eli jokainen vastinpari tuottaa neljä yhtälöä. Näistä yksi on ylimääräinen. Jokainen seuraava lisäkuva tuo mukanaan aina kaksi uutta ylimääräistä yhtälöä. Koska kaikkiin havaintoihin sisältyy hajontaa, niin orientointitietoihin kuin kuvahavaintoihin, eteenpäinleikkauksen avaruussuorat eivät tarkasti ottaen leikkaakaan toisiaan. Nämä jäännösvirheet on jotenkin tasoitettava uuden pisteen kolmeen koordinaattiin. Yleisesti tasointa tehdään minimoimalla ns. PNS-periaatteella eli kohdepisteen koordinaatit valitaan siten, että niistä laskettujen kamerakoordinaattien ja vastaavien kuvahavaintojen välisten jäännösvirheiden neliösumma minimiarvonsa.



Uuden pisteen 3-D koordinaattien määrittäminen kahden kuvan avulla. Kuvien ulkoiset orientoinnit tunnetaan. Havaitun pisteen kuvaussäteet kulkevat pitkin avaruussuoria, jotka leikkaavat toisensa uudessa kohdepisteessä.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{Pi} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_0 + \lambda_{pi} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{pi}$$

Eteenpäinleikkaus avaruudessa lausuttuna kollineaarisuusyhtälöillä.



Kuvassa on esitetty kameroiden projektiokeskuksiin asetettujen kohdekoordinaatistojen suuntaisten akselien ja kuvahavaintojen suhde. Vertaa tätä kuvaa edelliseen kuvaan, jossa on esitettyinä samojen kuvien kamerakoordinaatit.

$$\mathbf{X}_{Pi} = \mathbf{X}_0 + \lambda_{pi} (\mathbf{a}_{11i} \mathbf{x}'_{pi} + \mathbf{a}_{12i} \mathbf{y}'_{pi} + \mathbf{a}_{13i} \mathbf{z}'_{pi})$$

$$\mathbf{Y}_{Pi} = \mathbf{Y}_0 + \lambda_{pi} (\mathbf{a}_{21i} \mathbf{x}'_{pi} + \mathbf{a}_{22i} \mathbf{y}'_{pi} + \mathbf{a}_{23i} \mathbf{z}'_{pi})$$

$$\mathbf{Z}_{Pi} = \mathbf{Z}_0 + \lambda_{pi} (\mathbf{a}_{31i} \mathbf{x}'_{pi} + \mathbf{a}_{32i} \mathbf{y}'_{pi} + \mathbf{a}_{33i} \mathbf{z}'_{pi})$$

lyhyemmin kirjoitettuna sama asia:

$$\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_0 = \lambda_{pi} \mathbf{x}_{pi}$$

$$\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_0 = \lambda_{pi} \mathbf{y}_{pi}$$

$$\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_0 = \lambda_{pi} \mathbf{z}_{pi}$$

Kuvahavaintojen kiertäminen kohdekoordinaatistoon. Ensimmäisessä vaiheessa kummankin kameras kuvavektorit \mathbf{x}'_{pi} , \mathbf{y}'_{pi} , \mathbf{z}'_{pi} projisoidaan projektiokeskusten kautta kulkeville kohdekoordinaatiston pääsuorille vektoreiksi \mathbf{x}_{pi} , \mathbf{y}_{pi} , \mathbf{z}_{pi} 3D kiertomatriisin avulla. Myöhemmissä esimerkeissä käytetään usein lyhyttä esitystapaa, koska lausekkeista tulee muuten pitkiä.

Eteenpäinleikkaus yleisesti

$$\mathbf{x}'_{pi} = -c \frac{\mathbf{a}_{11i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{21i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{31i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]}{\mathbf{a}_{13i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{23i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{33i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]}$$

$$\mathbf{y}'_{pi} = -c \frac{\mathbf{a}_{12i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{22i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{32i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]}{\mathbf{a}_{13i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{23i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{33i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]}$$

Eteenpäinleikkaus voidaan laskea yleisistä kuvausyhtälöistä, mikäli piste on havaittu kahdella kuvalla, joiden orientoinnit tunnetaan.

$$\mathbf{x}'_{pi} (\mathbf{a}_{13i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{23i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{33i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]) = -c (\mathbf{a}_{11i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{21i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{31i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}])$$

$$\mathbf{y}'_{pi} (\mathbf{a}_{13i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{23i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{33i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}]) = -c (\mathbf{a}_{12i} [\mathbf{X}_{Pi} - \mathbf{X}_{0i}] + \mathbf{a}_{22i} [\mathbf{Y}_{Pi} - \mathbf{Y}_{0i}] + \mathbf{a}_{32i} [\mathbf{Z}_{Pi} - \mathbf{Z}_{0i}])$$

Ryhmitellään yhtälöt siten, että tuntemattomat ovat kertoimineen vasemmalla puolella ja vakiotermit ovat oikealla puolella.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{13i} + c \mathbf{a}_{11i}) \mathbf{X}_{Pi} + (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{23i} + c \mathbf{a}_{21i}) \mathbf{Y}_{Pi} + (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{33i} + c \mathbf{a}_{31i}) \mathbf{Z}_{Pi} \\ = (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{13i} + c \mathbf{a}_{11i}) \mathbf{X}_{0i} + (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{23i} + c \mathbf{a}_{21i}) \mathbf{Y}_{0i} + (\mathbf{x}'_{pi} \mathbf{a}_{33i} + c \mathbf{a}_{31i}) \mathbf{Z}_{0i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{13i} + c \mathbf{a}_{12i}) \mathbf{X}_{Pi} + (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{23i} + c \mathbf{a}_{22i}) \mathbf{Y}_{Pi} + (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{33i} + c \mathbf{a}_{32i}) \mathbf{Z}_{Pi} \\ = (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{13i} + c \mathbf{a}_{12i}) \mathbf{X}_{0i} + (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{23i} + c \mathbf{a}_{22i}) \mathbf{Y}_{0i} + (\mathbf{y}'_{pi} \mathbf{a}_{33i} + c \mathbf{a}_{32i}) \mathbf{Z}_{0i} \end{aligned}$$

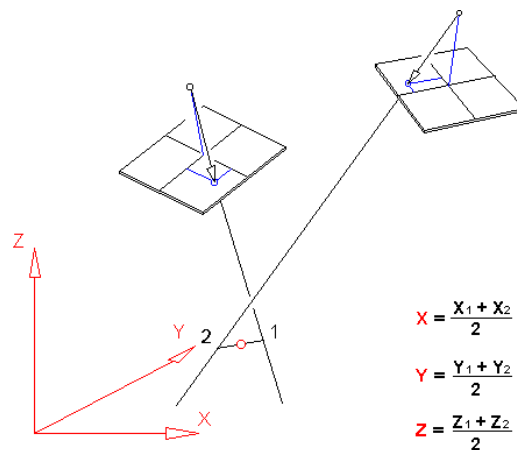
Pisteen kohdekoordinaatit $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})_{pi}$ ratkaistaan lineaarisesta yhtälöryhmästä. Havaintoyhtälöiden muuttujien kertoimet ja vakiotekijä lasketaan kuvahavainnoista ja kuvien orientointisuureista.

- [intersection by image coordinates of two images.xls](#)

Point	Object coordinates		Image coordinates		Intersected coord's			Standard errors	
9	X	50	Image 1	x	-7,3E-15	X	50	sigma_X	7,71E-13
	Y	50		y	0	Y	50	sigma_Y	1,09E-12
	Z	50	Image 2	x	-1,2E-14	Z	50	sigma_Z	4,08E-13
				y	0				
								sey	1,15E-11
	Xpi	Ypi	Zpi	Const				r2	1
	101,2394	-64,4251	-2E-15	1840,716				df	1
	17,4411	27,40745	115,519	8018,378				F	1,13E+29
	94,72227	-73,6729	-3,6E-15	1052,47				ssresid	1,33E-22
	22,55471	28,99891	114,2381	8289,587				ssreg	45336517

Laskuesimerkki kahden kuvan tapauksessa. Esimerkissä valitaan kohdepiste (50,50,50). Tämän kohdepisteen projektiot lasketaan 2:lle eri kuvalle. Tämän jälkeen koetetaan saada saaduilla kuvapisteeillä laskettua uudestaan 3D kohdepiste eteenpäinleikkauksena. Eteenpäinleikkauksen laskemiseen käytetään pienimmän neliösumman menetelmää. Laskujen jälkeen huomataan, että saadaan oikea tulos -> laskut toimivat.

Eteenpäinleikkaus konvergenttikuvaparilla



Eteenpäinleikkauksen kohdepiste lasketaan havaintoyhtälöistä tasoittamalla. Koordinaatit **X**, **Y** ja **Z** kuvaavat sen pisteen sijaintia, joka on kuvaussäteiden yhteisellä normaalilla ja yhtä kaukana kummastakin suorasta. (Tässä vaiheessa on joko kierretty kamerakoordinaatisto kohdekoordinaatiston suuntaiseksi tai x_{p1} , y_{p1} , x_{p2} , y_{p2} sisältävät alkuperäiset kiertoelementit kollineaarisuusyhtälöistä. Yllä olevassa kuvassa kiertoa ei ole vielä tehty.)

$$\frac{X_{Pi} - X_0}{Y_{Pi} - Y_0} = \frac{x_{pi}}{y_{pi}} \quad \frac{Y_{Pi} - Y_0}{Z_{Pi} - Z_0} = \frac{y_{pi}}{z_{pi}} \quad \frac{X_{Pi} - X_0}{Z_{Pi} - Z_0} = \frac{x_{pi}}{z_{pi}}$$

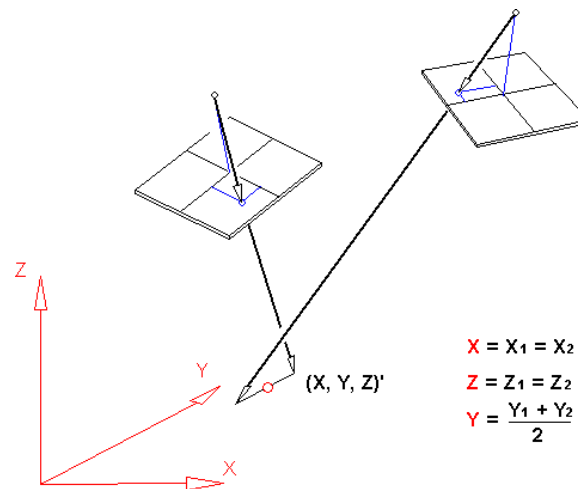
Kohdepisteen kuvaussäteitä vastaavien suorien yhtälöt muodostetaan kollineaarisuusyhtälöiden murtofunktioiden jakamalla ne rivittäin. Samalla eliminoidaan mittakaava.

$$\begin{aligned} y_{pi} X_{Pi} - x_{pi} Y_{Pi} + x_{pi} Y_0 - y_{pi} X_0 &= 0 \\ z_{pi} Y_{Pi} - y_{pi} Z_{Pi} + y_{pi} Z_0 - z_{pi} Y_0 &= 0 \\ z_{pi} X_{Pi} - x_{pi} Z_{Pi} + x_{pi} Z_0 - z_{pi} X_0 &= 0 \end{aligned}$$

Koordinaattien **XP**, **YP** ja **ZP** ratkaisemiseksi saadaan kolmenlaisia havaintoyhtälöitä. Yhdellä kuvalla on yhdelle kohdepisteelle kaksi toisistaan riippumatonta kuvahavaintoa x_{pi} , y_{pi} , joilla muodostetaan kaksi havaintoyhtälöä. Koska eteenpäinleikkauksen koordinaattituntemattomia on kolme, niiden ratkaisemiseen tarvitaan kahden kuvan havainnot, joilla saadaan muodostettua neljä havaintoyhtälöä. Yhtälöt ovat tuntemattomien suhteen lineaarisia.

Ratkaisu lasketaan yleensä pienimmän neliösumman menetelmällä.

Eteenpäinleikkaus stereomallilla



Stereomallilla jäännösvirhe tasataan pystyparallaksia vastaavaan kohdekoordinaattiin, tässä tapauksessa **Y**-koordinaattiin. Vaakakuvauksissa tasattava koordinaatti olisi **Z**.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_O + \lambda_P \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_I \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_P$$

$$R_{i_{to}_o} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\omega & -\cos\phi \sin\omega & \sin\phi \\ \cos\omega \sin\omega + \sin\omega \sin\phi \cos\omega & \cos\omega \cos\omega - \sin\omega \sin\phi \sin\omega & -\sin\omega \cos\phi \\ \sin\omega \sin\omega - \cos\omega \sin\phi \cos\omega & \sin\omega \cos\omega + \cos\omega \sin\phi \sin\omega & \cos\omega \cos\phi \end{pmatrix}$$

Kuvautumisyhtälöt kovalta kohteeseen ja kiertomatriisi kamerakoordinaatistosta kohdekoordinaatistoon.

- Merkitään kohdepisteelle (molemmilta kuvilta on siis havaittu sama kohde)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{P1} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{P2}$$

- Tehdään eteenpäinleikkaus XY-tasolla (tässä vaiheessa on joko kierretty kamerakoordinaatisto kohdekoordinaatiston suuntaiseksi tai x_{p1} , y_{p1} , x_{p2} , y_{p2} sisältävät alkuperäiset kiertoelementit kollineaarisuusyhtälöistä)

$$X_{P1} = X_{O1} + \lambda_1 x_{P1}$$

$$Y_{P1} = Y_{O1} + \lambda_1 y_{P1}$$

$$X_{P2} = X_{O2} + \lambda_2 x_{P2}$$

$$Y_{P2} = Y_{O2} + \lambda_2 y_{P2}$$

- Koska kohdepiste oli sama molemmille kuvahavainnoille, yhdistetään:

$$X_{O1} + \lambda_1 x_{P1} = X_{O2} + \lambda_2 x_{P2}$$

$$Y_{O1} + \lambda_1 y_{P1} = Y_{O2} + \lambda_2 y_{P2}$$

- Eliminoidaan mittakaavoista ensimmäinen

$$\lambda_1 = \frac{X_{O2} + \lambda_2 x_{P2} - X_{O1}}{x_{P1}}$$

$$\lambda_1 = \frac{Y_{O2} + \lambda_2 y_{P2} - Y_{O1}}{y_{P1}}$$

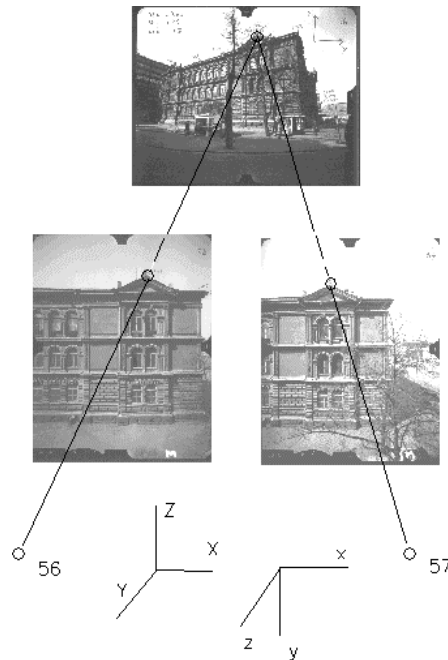
- Ratkaistaan edellisistä yhtälöistä eteenpäinleikkauksen mittakaava toisen kuvan havaintovektorille

$$\lambda_2 = \frac{x_{P1} (Y_{O2} - Y_{O1}) - y_{P1} (X_{O2} - X_{O1})}{y_{P1} x_{P2} - x_{P1} y_{P2}}$$

- Palataan edellisiin yhtälöihin ja ratkaistaan mittakaava ensimmäisen kuvan havaintovektorille

Laskuesimerkki

- Esimerkki: Ateneum, pisteen 1301 kohdekoordinaatit kuvaparilta 56-57



- Lähtötiedot: kameroiden ulkoiset orientoinnit ja kameravakio (kohdekoordinaatit pisteille 56 ja 57 ovat ko. kuvien projektiokeskukset)

Kamerakoordinaatit [mm]:

	x	y	z
Kuva 56	10.753	-31.801	-60.16
Kuva 57	-9.258	-29.078	-60.16

Kohdekoordinaatit [m]:

	X	Y	Z
56	18441.818	49764.762	12.779
57	18448.842	49764.891	13.415
1301	18444.648	49746.114	22.615

Kierrot [gon]:

	OMEGA	FI	KAPPA
56	-100.0444	1.6583	399.9678
57	-100.0168	4.2690	399.9912

- Kierretään kuvahavainnot kohdekoordinaatiston suuntaisiksi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{56 \Rightarrow 1301} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{56} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{1301_{56}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{57 \Rightarrow 1301} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{57} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{1301_{57}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{56 \Rightarrow 1301} = \begin{pmatrix} .999660629 & .000505625 & .026045570 \\ -.026045207 & -.000710607 & .999660513 \\ .000523961 & -.999999620 & -.000697197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.010753 \\ -0.031801 \\ -0.06016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0091663 \\ -0.0603970 \\ -0.0318486 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{57 \Rightarrow 1301} = \begin{pmatrix} .997752492 & .000137919 & .067007051 \\ -.067007011 & -.000273156 & .997752467 \\ .000155913 & -.999999953 & -.000263301 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.009258 \\ -0.029078 \\ -0.06016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0132723 \\ -0.0593965 \\ -0.0290924 \end{pmatrix}$$

- Lasketaan pisteen 1301 kohdevektorin mittakaavaluku kummallekin kuvalle

$$\lambda_{56_{1301}} = 308.6702$$

$$\lambda_{57_{1301}} = 316.0417$$

- Lasketaan pisteen XY-koordinaatit kummankin kuvan kautta

$$X_{1301_{56}} = 18441.818 + 308.6702 \times 0.0091664 = 18444.647$$

$$Y_{1301_{56}} = 49764.762 + 308.6702 \times (-0.0603970) = 49746.119$$

$$X_{1301_{57}} = 18448.842 + 316.0417 \times (-0.0132723) = 18444.647$$

$$Y_{1301_{57}} = 49764.891 + 316.0417 \times (-0.0593965) = 49746.119$$

- Lasketaan myös Z-koordinaatti kummankin kuvan kautta

$$Z_{1301_{56}} = 12.779 + 308.6702 \times (0.0318486) = 22.610$$

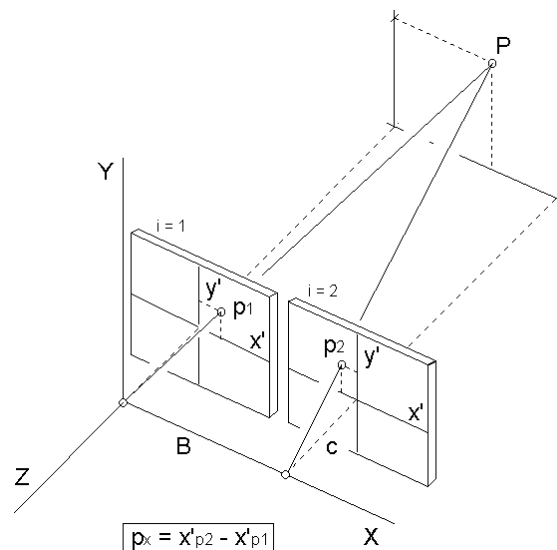
$$Z_{1301_{57}} = 13.415 + 316.0417 \times (0.0290924) = 22.609$$

- Tässä tapauksessa pisteen 1301 kohdekoordinaatit laskettiin suoraan (tasoittamatta) kuvien 56 ja 57 tehdyistä havainnoista. Samalle pisteelle on saatu tasoittamalla isomman kuvajoukon havainnoista kohdekoordinaatit, joita voidaan pitää 'oikeampina'. Näiden eroja kutsutaan jäännösvirheiksi.

	Havaittu	Oikea	Jäännösvirhe
X	18444.647	18444.648	-.001
Y	49746.119	49746.114	.005
Z	22.610	22.615	-.005

Eteenpäinleikkaus stereokuvauksen normaalitapauksessa

Stereokuvauksen normaalitapauksessa valitaan 3-D koordinaatistoksi kuvaparin toisen kameran kamerakoordinaatisto. Tällöin kiertomatriisi on yksikkömatriisi, toisen kuvan projektiokeskus pysyy origona, ja toisen kuvan projektiokeskus on $(\mathbf{B}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Kameravakion arvo eli yhteisen kuvatason etäisyys kuvakannasta on tässä c . Kameraoptiikan ja kuva-anturin virheet korjataan kuvahavainnoista. Kohdepisteen 3-D koordinaatit lasketaan $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ ns. parallaksikaavalla, ensin \mathbf{Z} , sen jälkeen kuvapisteen mittakaavaluku \mathbf{M} , ja lopuksi \mathbf{X} ja \mathbf{Y} . Jos parallaksihavainnon virhe tunnetaan, sen likimääräinen vaikutus $(d\mathbf{Z})$ etäisyshavaintoon voidaan laskea differentioidulla parallaksikaavalla.



$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_{p1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{p1}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P2} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_{p2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}_{p2}$$

Kohdepiste on sama:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P1} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P2}$$

Stereokuvauksen normaalitapaus -> havaintovektorien mittakaava kohdepisteeseen on sama:

$$\lambda_{p1} = \lambda_{p2}$$

Stereokuvauksen normaalitapaus -> kuvilla esiintyy vain vaakaparallaksia:

$$\begin{bmatrix} x' + p_x \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{p1} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{p2}$$

Näillä tiedoilla akuperäisen yhtälöparin yhdistetty ensimmäinen rivi näyttää:

$$\lambda_p x'_{p1} = B + \lambda_p x'_{p2}$$

$$\lambda_p (x'_{p1} - x'_{p2}) = B$$

Ratkaistaan mittakaava:

$$\lambda_p = \frac{B}{(x'_{p1} - x'_{p2})} = \frac{B}{-p_{xp}}$$

Kohteen etäisyys saadaan alkuperäisen yhtälöparin ensimmäisestä yhtälöstä ottamalla alin rivi ja sijoittamalla saatu mittakaava. Samaan tulokseen päästään kuvan avulla tekemällä verranto. Verrannon huomaaminen on helpompaa, jos siirtää kuvien projektiokeskukset päällekkään (jolloin kanta B siirtyy kohteeseen). Jos intoa riittää, voit piirtää kuvan ja koettaa löytää tämän verrannon.

$$Z_P = - \frac{B z'}{p_{xp}}$$

Kun mittakaava sijoitetaan akuperäisiin yhtälöihin, saadaan:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P1} = \frac{B}{-p_{xp}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{p1}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{P2} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{B}{-p_{xp}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{p2}$$

Kohteen 3D piste voidaan siis laskea molempien kuvien kautta.